Revista Multidisciplinaria de Ciencia Básica, Humanidades, Arte y Educación
ISSN 2992-7722, Volumen 4, Número 16, pp. 143-147, Enero-Febrero 2026, mjshae.org
DOI 10.5281/zenodo.18778970

Ajuste del modelo de perfil de Max-Burkhart mediante el algoritmo de Levenberg-Marquardt aplicado a cinco especies de *Pinus*

David Medina Hernández
TecNM-Instituto Tecnológico Superior de Perote
Maestría en Planificación de Empresas y Desarrollo Regional
0000-0001-9873-3752

Carlos Cuevas Suárez
TecNM-Instituto Tecnológico Superior de Perote
Maestría en Planificación de Empresas y Desarrollo Regional
0000-00001-8556-9885

Recibido: 10 de febrero de 2026 | *Aceptado*: 24 de febrero de 2026 | *Publicado en línea*: 26 de febrero de 2026 |

Resumen: En este trabajo se muestra el ajuste del modelo de Max-Burkhart considerado como no lineal, para cinco especies de *Pinus*: *P. ayacahuite*, *P. montezumae*, *P. patula*, *P. pseudostrobus* y *P. teocote*, para diversas localidades del centro del estado de Veracruz, México. Para la determinación de los coeficientes del modelo para cada especie y sitio se emplea el algoritmo de Levenberg-Marquardt que se encuentra implementado en el *package minpack* de R. Como ejemplo se comparan de forma gráfica los ajustes obtenidos de esta manera con el modelo lineal optimizado para *Pinus ayacahuite* en Ingenio del Rosario y *Pinus teocote* en Los Molinos

Palabras clave: modelos de ahusamiento; modelo de Max-Burkhart; algoritmo de Levenberg-Marquardt; R Studio; package minpack.

Title: *Max-Burkhart taper model fitting using the Levenberg-Marquardt algorithm applied to 5 Pinus species.*

Abstract: This paper presents the adjustment of the Max-Burkhart model, considered as non-linear, for five species of *Pinus*: *P. ayacahuite*, *P. montezumae*, *P. patula*, *P. pseudostrobus*, and *P. teocote*, across various locations in central Veracruz, Mexico. To determine the model coefficients for each species and site, the Levenberg-Marquardt algorithm is used, as implemented in the *minpack* package for R. As an example, the adjustments obtained through this method are graphically compared with the optimized linear model for *Pinus ayacahuite* in Ingenio del Rosario and *Pinus teocote* in Los Molinos. The results show a minor difference in the graphs for both types of adjustment, suggesting that either method may be chosen for the various purposes provided by a profile or tapering function.

Keywords: taper models; Max-Burkhart model; Levenberg-Marquardt algorithm; R Studio; minpack package.

Introducción

Las funciones de perfil (o ahusamiento) tratan de describir el diámetro de un árbol a través de una o varias medidas determinadas (como diámetro normal, diámetros a diversas alturas y altura total del árbol). En la literatura existen diferentes expresiones matemáticas que se pueden clasificar como lineales, no lineales, segmentados o trigonométricos y que cumplen con propiedades como lo son la diferenciabilidad o que el valor del diámetro sea cero en la altura total de cada árbol (Rodríguez et al., 2015, Pompa et al., 2009).

Un ejemplo de las funciones denominadas segmentadas corresponde al modelo de Max & Burkhart (1976) que consta de polinomios cuadráticos continuos y

Cómo citar:

Medina Hernández, D. & Cuevas Suárez, C. (2026). Ajuste del modelo de perfil de Max-Burkhart mediante el algoritmo de Levenberg-Marquardt aplicado a cinco especies de *Pinus*. *Revista Multidisciplinaria de Ciencia Básica, Humanidades, Arte y Educación, 4*(16), 143-147. DOI 10.5281/zenodo.18778970 [.RIS]

© Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.

ISSN 2992-7722, Volumen 4, Número 16, pp. 143-147, Enero-Febrero 2026, mjshae.org
DOI 10.5281/zenodo.18778970

diferenciables, la cual tiene por expresión:

$$y = \beta_1(x-1) + \beta_2(x^2-1) + \beta_3(b_1 - x)^2 I_1 + \beta_4(b_2 - x)^2 I_2,$$

donde $I_i = \begin{cases} 1, x \leq b_i \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$, para $i = 1, 2$. Una expresión de este tipo, pretende describir el hecho que en todo árbol pueden distinguirse tres formas geométricas.

Los valores $\beta_k, k = 1, \ldots, 4$ y $b_k, k = 1, 2$, denominados puntos de corte deben determinarse a partir de un conjunto de mediciones. El problema no lineal consiste en determinar los coeficientes que acompañan al modelo, así como los puntos de corte. Para ello se puede emplear el algoritmo de Levenberg – Marquardt mediante el uso de un package del programa de análisis estadístico R, (R Core Team, 2022). Con los datos de una muestra de *Pinus ayacahuite, montezumae, patula, pseudostrobus y teocote* en diferentes localidades de la zona centro del estado de Veracruz, México, se determinan estos parámetros y se compara gráficamente los resultados obtenidos con la metodología optimizada presentada en otro documento para el sitio del ejido Ingenio del Rosario y ejido los Molinos para las especies *ayacahuite* y *teocote* respectivamente.

Metodología

Para calcular los valores $\beta_k, k = 1, \ldots, 4$ y $b_k, k = 1, 2$, se empleará el algoritmo de Levenberg – Marquardt, que es una técnica iterativa que localiza el mínimo de una función expresada como la suma de cuadrados de funciones no lineales (Lourakis M, 2005), empleando para ello el comando nlsLM que se encuentra en el package minpack.lm (Elzhov T., et al., 2023), de R (R Core Team, 2022), una vez que, para cada especie y sitio considerado en este estudio, se obtuviera una muestra (no destructiva) con un determinado número de individuos en la que se obtuvieron alturas divididas en 6 clases diamétricas y empleando la notación $y = \left(\frac{d_i}{D}\right)^2$ y $x = \frac{h_i}{H}$, en la que d_i representa el diámetro a una altura h_i (con respecto al suelo), D el diámetro normal y H la altura total del árbol. La altura se mide en metros y el diámetro en centímetros.

Para la implementación de este algoritmo, la tabla 1 muestra parte del código empleado, que sirve de base para realizar lo que se establece en la siguiente sección.

Tabla 1. *Script en R para obtener el ajuste del modelo de Max-Burkhart empleando el algoritmo de Levenberg – Marquardt*.

```
library(minpack.lm)

p<-…

q<-…

modelo<-nlsLM(formula=p~b1*(q-1)+b2*(q^2-
1)+b3*(a1-q)^2*(q<=a1)+b4*(a2-
q)^2*(q<=a2),data=…,start=list(b1=0.16,b2=-
0.15,b3=0.5,b4=56,a1=1.4,a2=0.1))

summary(modelo)
```

Resultados

La tabla 2 muestra el resumen de los parámetros obtenidos empleando el script de la tabla 1 para cada especie y sitio considerado.

Tabla 2. *Resumen de los parámetros del modelo.*

Especie	Ejido	Coeficientes
ayacahuite	Ingenio del Rosario	$\beta_1 = 0.1437$
		$\beta_2 = -0.1446$
		$\beta_3 = 0.5646$
		$\beta_4 = 56.26$
		$b_1 = 1.408$
		$b_2 = 0.1164$
	Monte Grande	$\beta_1 = -0.4924$
		$\beta_2 = -0.5506$
		$\beta_3 = -12090$
		$\beta_4 = 10770$
		$b_1 = 0.04762$
		$b_2 = 0.05008$

ISSN 2992-7722, Volumen 4, Número 16, pp. 143-147, Enero-Febrero 2026, mjshae.org
DOI 10.5281/zenodo.18778970

motenzumae	San Juan del Monte	$\beta_1 = -1.292$ $\beta_2 = 0.2207$ $\beta_3 = -9039$ $\beta_4 = 1615$ $b_1 = 0.02345$ $b_2 = 0.04227$
	Villa Aldama	$\beta_1 = -1.165$ $\beta_2 = 0.08377$ $\beta_3 = -18440$ $\beta_4 = 17640$ $b_1 = 0.05462$ $b_2 = 0.05569$
patula	Ingenio del Rosario	$\beta_1 = -1.313$ $\beta_2 = 0.239$ $\beta_3 = -57000$ $\beta_4 = 54700$ $b_1 = 0.0455$ $b_2 = 0.04592$
	Monte Grande	$\beta_1 = -1.637$ $\beta_2 = 0.5277$ $\beta_3 = 84130$ $\beta_4 = -88190$ $b_1 = 0.03904$ $b_2 = 0.03834$
	San Juan del Monte	$\beta_1 = -1.585$ $\beta_2 = 0.5166$ $\beta_3 = -7119$ $\beta_4 = 3668$ $b_1 = 0.03428$ $b_2 = 0.04417$
pseudostrobus	Ingenio del Rosario	$\beta_1 = -1.517$ $\beta_2 = 0.3311$ $\beta_3 = -62870$ $\beta_4 = 61010$ $b_1 = 0.0394$ $b_2 = 0.03991$
	Monte Grande	$\beta_1 = -1.401$ $\beta_2 = 0.3432$ $\beta_3 = -81470$ $\beta_4 = 78870$ $b_1 = 0.03854$ $b_2 = 0.03908$
	Buenavista	$\beta_1 = -1.395$ $\beta_2 = 0.3422$ $\beta_3 = -15510$ $\beta_4 = 12510$ $b_1 = 0.02928$ $b_2 = 0.03197$
teocote	Las Vigas	$\beta_1 = -1.619$ $\beta_2 = 0.5571$ $\beta_3 = -43830$ $\beta_4 = 325.9$ $b_1 = 0.01043$ $b_2 = 0.03915$
	Los Molinos	$\beta_1 = -1.293$

ISSN 2992-7722, Volumen 4, Número 16, pp. 143-147, Enero-Febrero 2026, mjshae.org
DOI 10.5281/zenodo.18778970

		$\beta_2 = 0.1436$
		$\beta_3 = 2072$
		$\beta_4 = -3038$
		$b_1 = 0.07027$
		$b_2 = 0.05986$
	San Juan del Monte	$\beta_1 = -0.9547$
		$\beta_2 = -0.09308$
		$\beta_3 = -8443$
		$\beta_4 = 6772$
		$b_1 = 0.04779$
		$b_2 = 0.05238$

El comando *summary* también proporciona el valor REMC (raíz cuadrada del error cuadrático medio) y que es uno de los diversos criterios para determinar la bondad de ajuste de un modelo. Para la especie *ayacahuite* en Ingenio del Rosario, se obtiene que el REMC es 0.2378, mientras que para *teocote* en el ejido los Molinos es 0.3096, lo que muestra que tienen un buen ajuste. En las figuras 1 y 2, se muestran en una sola ventana la gráfica de dispersión, en color rojo la gráfica del ajuste optimizado (problema lineal) y en verde la gráfica del ajuste del problema no lineal. Como puede apreciarse en la figura 1 si existe diferencia en los valores predichos por cada modelo mientras que en la figura 2, coinciden casi en todas partes, ya que no se distingue la gráfica roja.

Fig. 1. *Gráficas obtenidas para ayacahuite en Ingenio del Rosario.*

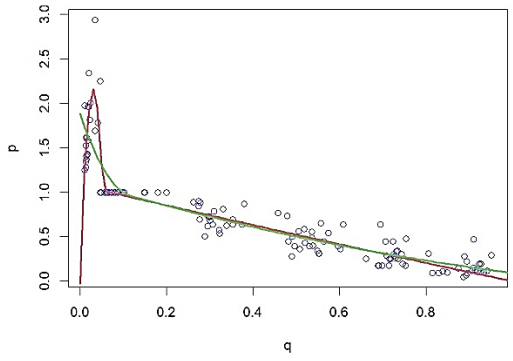
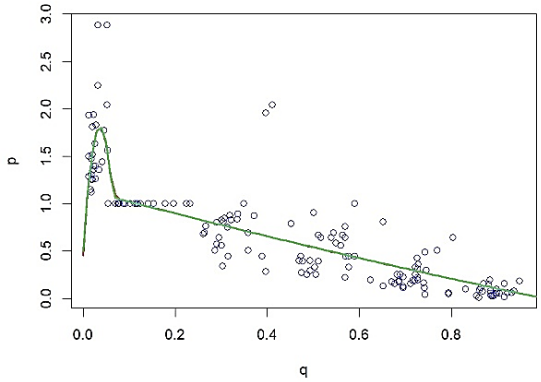


Fig. 2. *Gráficas obtenidas para teocote en los Molinos*.



Discusión

Puesto que los valores del REMC para los casos mostrados es pequeño, las expresiones aquí obtenidas pueden emplearse para definir el perfil de un árbol, que pueden ser utilizadas para tarifas de cubicación.

Al comparar gráficamente el ajuste no lineal con la forma optimizada del modelo lineal correspondiente, en los casos que se presentaron se nota en uno de ellos pequeñas diferencias en los valores predichos.

Todo lo anterior, muestra sólo que pueden considerarse diferentes modelos con el fin de obtener una función de perfil. La elección entre las dos formas (la lineal optimizada y la no lineal) puede depender de los valores del error cuadrático medio.

Estas diferentes formas de obtener los coeficientes de un modelo abren el panorama para otros tipos como lo son los generalizados, entre los que se encuentran los mixtos, los que serán abordados en un trabajo próximo.

Conclusión

En este trabajo se emplea el algoritmo de Levenberg – Marquardt en R para 5 especies y diferentes sitios considerando al modelo de Max-Burkhart como no lineal, mostrando que en uno de los casos que aquí se presentaron se tiene una pequeña diferencia con aquel que se obtiene al considerar un modelo lineal con puntos de corte de forma optimizada.

Agradecimientos

A todos los ejidos mencionados por las facilidades otorgadas para la obtención de las medidas no destructivas para cada especie que se consideró en este estudio.

ISSN 2992-7722, Volumen 4, Número 16, pp. 143-147, Enero-Febrero 2026, mjshae.org
DOI 10.5281/zenodo.18778970

Referencias

Elzhov T. V., Mullen K. M., Spiess A. N & Bolker B.. (2023). *Minpack.lm. R package*. Vienna, Austria. R Foundation For Statistical Software.

Lourakis, M. I. (2005). A brief description of the Levenberg-Marquardt algorithm implemented by levmar. *Foundation of Research and Technology, 4*(1), 1-6. https://users.ics.forth.gr/lourakis/levmar/levmar.pdf

Max, T. A., & Burkhart, H. E. (1976). Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science, 22*(3), 283–289. https://doi.org/10.1093/forestscience/22.3.283

Pompa García, M., Corral Rivas, J. J., Díaz Vásquez, M. A., & Martínez Salvador, M. (2009). Función de ahusamiento y volumen compatible para Pinus arizonica Engelm. *Ciencia forestal en México*, *34*(105), 117-134. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-35862009000100006&lng=es&tlng=es

R Core Team. (2022). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. https://www.R-project.org/

Rodríguez-Toro, A., Rubilar-Pons, R., Muñoz-Sáez, F., Cártes-Rodríguez, E., Acuña-Carmona, E., & Cancino-Cancino, J. (2016). Modelo de ahusamiento para Eucalyptus nitens, en suelos de cenizas volcánicas de la región de La Araucanía (Chile). *Revista de la Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional de Cuyo, 48*(1), 101-114. https://www.redalyc.org/pdf/3828/382846012010.pdf