Les petites planètes

par

A. GLODEN.

On appelle *petites planètes, planétoïdes* ou *astéroïdes* les corps célestes de dimensions relativement faibles qui gravitent autour du soleil en restant généralement entre les orbites de Mars et de Jupiter.

1) Découverte des petites planètes.

KEPLER avait écrit: Intra Martem et Jovem interposui planetam. En 1780 BODE, directeur de l'Observatoire de Berlin, signala une règle mnémonique donnant les distances des planètes au soleil. Voici cette règle: Ecrivons la suite dans laquelle chaque nombre se déduit du précédent, à partir du second, en le multipliant par 2:

0 3 6 12 24 48 96 . . .

Ajoutons à tous les nombres de cette suite 4:

4 7 10 16 28 52 100 . . .

Divisons les nombres obtenus par 10:

0,4 0.7 1 1,6 2,8 5,2 10 . . .

Ce sont à peu près les distances au soleil des 6 planètes connues à cette époque, ces distances étant exprimées en unités astronomiques, à l'exception du nombre 2,8 qui ne correspondait alors à rien de connu.

L'idée de l'existence d'une planète entre Mars et Jupiter était tellement ancrée dans les esprits qu'au Congrès Astronomique de Gotha en 1800 il fut décidé d'entreprendre des recherches systématiques pour découvrir l'astre présumé. Le 1er janvier 1801, PIAZZI découvrit à Palerme une planète nouvelle, à laquelle on donna le nom de Cérès, fille de Saturne. Comme on a reconnu à cette époque que le diamètre de Cérès était environ de 900 km, (voir sub 4 la valeur admise aujourd'hui) les astronomes se rendaient compte que cet astéroïde ne pouvait suffire à combler le vide apparent existant entre Mars et Jupiter. Les recherches furent donc poursuivies. En 1802 déjà, OLBERS aperçut une seconde planète, Pallas. En 1804 et

1807 HARDING et OLBERS découvrirent Junon et Vesta. Une 5e planète, Astrée, fut découverte en 1845. Depuis les découvertes se succèdent sans interruption.

A la méthode visuelle s'ajoute la méthode photographique appliquée d'abord par M. WOLF. L'observation visuelle que les astronomes continuaient d'appliquer conjointement avec l'autre jusque vers 1891 a été abandonnée depuis. Grâce à l'observation photographique le nombre des astéroïdes s'accrut rapidement. Entre 1931 et 1935 on a découvert 192 planétoïdes, c'est la plus riche moisson qu'on ait obtenue dans un intervalle de 4 ans. De 1936 à 1940 on a repéré 163 nouveaux astéroïdes, de 1941—43 47, et leur nombre total s'élevait le 30 juin 1943 à 1560 objets catalogués. Les 3 planétoïdes Apollo, Adonis, Hermès, récemment découverts, n'ont pas été catalogués.

2) Observatoires spécialisés dans la recherche des planétoïdes.

Ce sont actuellement ceux de BERGEDORF (Hambourg), BUDAPEST, HEIDELBERG, JOHANNESBURG (Transvaal), NICE, SIMEIS (Crimée), TURKU (Finlande), UCCLE, WILLIAMSBAY (Wisconsin). L'observatoire de Turku semble le mieux équipé pour des recherches systématiques.

Il y a une véritable technique de la découverte des astéroïdes par la photographie. Dans un instrument photographique parfaitement réglé sur le mouvement diurne, les étoiles donnent des images circulaires, les astéroïdes en raison de leur mouvement propre se traduisent par des traînées plus ou moins longues.

Un instrument très apprécié des astronomes faisant la chasse aux petites planètes est le microscope à éclipses (blink-microscope); il permet de superposer les étoiles d'une région déterminée d'une plaque photographique point par point avec leurs identiques sur la région correspondante d'une plaque prise à une autre époque. On peut parfois découvrir sur l'une des plaques un objet céleste qui n'est pas sur l'autre, c'est une planète ou une comète. Il faut faire après des calculs d'identification pour voir si on a bien une planète nouvelle et non une planète déjà découverte et perdue de vue pendant un certain temps.

3) Désignation des astéroïdes.

Au début on emprunta leurs noms à la mythologie grecque. Mais l'Olympe n'était pas assez peuplé pour permettre de donner un nom à tous les astéroïdes découverts. Les astronomes durent donc chercher d'autres noms. Quelques-uns de ceux-ci rappellent la nationalité du découvreur: Russia, Belgica. A d'autres on a attribué des

noms dérivant de ceux de certaines villes: Chicago, Antwerpia; à d'autres encore on a donné les noms de savants illustres: Newtonia, Stroobantia, Delportia.[1]) On a même eu recours à des noms rappelant certaines vertus: Modestia, Patientia. Une petite planète a reçu le nom de Poesia.

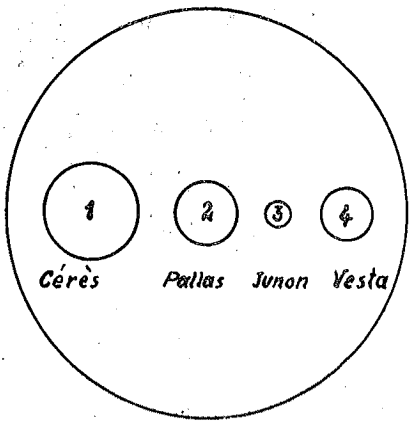
Aujourd'hui on assigne à chaque astéroïde admis à titre définitif un numéro d'ordre qu'on fait suivre de son nom. P. ex. la planète N° 1 porte le nom de Cérès, la planète N° 125 celui de Liberatrix.

4) Rayons des astéroïdes.

On sait qu'on détermine les dimensions des astres à diamètre apparent sensible par des mesures micrométriques. Dans le cas des petites planètes la mesure micrométrique directe est extrêmement difficile, en raison de la petitesse de ces objets. Elle a pourtant été réalisée par BARNARD aux observatoires Yerkes et Lick en 1894 et 1895. Voici le diamètre réel d'après ces mesures:

No	Nom	Diamètre
1	Cérès . . .	767 km.
2	Pallas . . .	489
3	Junon . . .	193
4	Vesta . . .	386

Donnons, à titre de comparaison, le diamètre de la lune: 3480 km. (fig. 1). Ces planètes sont relativement brillantes et volumineuses; il



[1]) STROOBANT et DELPORTE étaient directeurs de l'Observatoire Royal Astronomique à Uccle (Bruxelles).

n'en est pas de même des objets qu'on découvre encore actuellement et qui ne sont décelés que dans les instruments puissants, utilisés pour l'observation régulière des planétoïdes dans les stations que nous avons nommées sub 2).

Grâce à l'observation visuelle on a repéré des astéroïdes dont le maximum d'éclat atteignait la 11,6e grandeur moyenne. L'observation photographique a fait reculer cette limite jusqu'à 13,6.

Les rayons des astéroïdes varient de 0,4 km pour Adonis à 383 km pour Cérès. Parmi les planétoïdes actuellement connus il n'y en a guère que 1 % dont le rayon est supérieur à 120 km.

5) Orbites et périodes de révolution sidérale.

Orbites. — Les orbites extrêmes sont celles de Hermès [2]) (a = 1,2904) et de Hidalgo [3]) (a = 5,7999), a désignant le demi-grand axe de l'ellipse décrite par la planète autour du soleil. Pendant près d'un siècle on a cru que le groupe des petites planètes était limité par les orbites de Mars (a = 1,5) et de Jupiter (a = 5,2); on sait maintenant qu'il s'étend de Mercure à Saturne. (fig. 2).

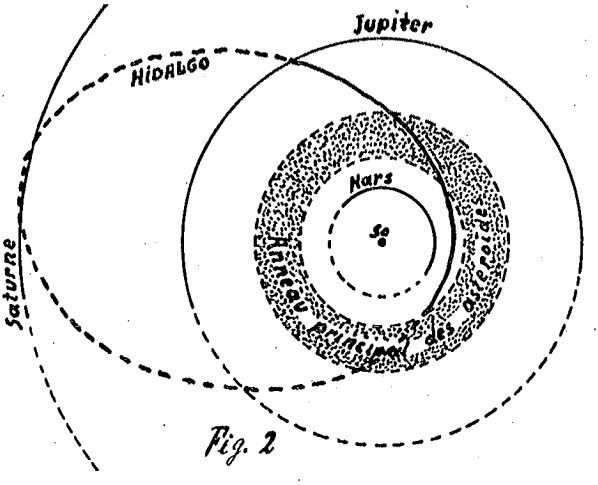


Fig. 2

[2]) L'astéroïde Hermès a été découvert par K. REINMUTH à l'Observatoire de Heidelberg.

[3]) La planète Hidalgo a été découverte en 1920 à Bergedorf par BAADE.

Périodes de révolution sidérale. — Rappelons la 3e loi de Képler exprimée par la relation $\frac{T^2}{a^3} = \frac{T'^2}{a'^3}$, T et a désignant resp. la période et le demi-grand axe d'une planète, T' et a' les éléments correspondants d'une autre planète. Hermès a la plus courte période, 1 an, 467, Hidalgo, la plus longue, 13 ans, 968.

Excentricités des orbites. — L'orbite de l'astéroïde N° 1262 Sniadeckia a une excentricité e = 0,0022, inférieure à la plus petite excentricité des orbites des grosses planètes, savoir 0,0068 correspondant à l'orbite de Vénus. L'ellipse décrite par Adonis a une excentricité e = 0,7792, supérieure à celle de certaines orbites de comètes périodiques.

Inclinaisons des orbites. — Donnons encore les valeurs extrêmes:

0°,009 pour l'astéroïde N° 1383 Limburgia;
42°,545 — — N° 944 Hidalgo.

6) Forme des astéroïdes.

Les données sub 4) attribuent aux astéroïdes la forme d'une sphère. Barnard a cru deviner la forme sphérique des quatre premiers astéroïdes découverts. Mais il est très probable qu'un grand nombre d'entre eux ont des formes assez irrégulières. Quelques astronomes ont aperçu la petite planète Eros sous la forme d'une étoile double serrée, d'autres lui ont trouvé une forme allongée. L'ellipsoïde de révolution aurait pour son plus grand diamètre de 25 à 29 milles, pour le plus petit diamètre 8—10 milles, ce qui correspond, au plus, à 47 resp. 16 km.

7) Variations d'éclat.

Un certain nombre de planétoïdes présentent des phases comme p. ex. Vénus. Une quarantaine d'entre eux présentent des variations d'éclat. Ces variations sont très faibles, elles ne dépassent 0,25 magnitude que pour une vingtaine d'objets. La petite planète Eros présente des variations d'éclat d'une période de $2^h\ 38^{min}$, mais les amplitudes sont différentes suivant les époques d'observation. On n'a pas réussi à expliquer intégralement ces variations de luminosité d'Eros.

Causes probables des variations d'éclat des planétoïdes. — On suppose que les planétoïdes tournent chacun autour d'un axe qui le traverse. Si l'astre a une forme sphéroïdale, les fluctuations de luminosité sont attribuables à des régions d'albedos différents,[4]) apparaissant au cours de chaque période.

[4]) On appelle albedo d'un corps céleste le rapport de la quantité de lumière diffusée par cet astre à la quantité de lumière qu'il reçoit.

8) Couleur des planétoïdes.

Les planétoïdes ne renvoient pas seulement la lumière du soleil, mais en altèrent la couleur. Rappelons que, parmi les grosses planètes, le sol de Mars apparaît comme possédant une teinte générale rougeâtre, teinte due d'après certains savants à l'abondance de grès rouge à la surface de l'astre. Cérès a un indice de couleur de 0,4 et apparaît d'un vert-clair. Vesta doué d'un indice de couleur de 0,8 est d'un jaune sombre, et l'observation visuelle est confirmée par des mesures au colorimètre.

A. W. RECHT a déterminé l'indice de couleur d'une série de 35 planètes; il varie de 0,02 correspondant au blanc bleuté à 1,31 correspondant au jaune orange.

Des mesures photoélectriques ont été effectuées au sujet des 4 premiers planétoïdes découverts, et les mesures mettent en évidence un éclat remarquablement constant si l'on fait abstraction du coefficient de phase. Ces planétoïdes présentent des phases comme la lune et comme p. ex. Vénus.

N. J. BOBROVNIKOFF a abordé en 1928 l'observation spectrographique d'une douzaine d'astéroïdes. Il constata qu'ils présentent des variations d'intensité dans leur spectre continu de type solaire. Elles s'expliquent par la rotation du planétoïde et par les différences suivant les régions du pouvoir réflecteur. A partir de pareils changements relevés dans le spectre continu de Vesta, Bobrovnikoff a conclu que celle-ci a une période de rotation de $5^{h}.55^{min}.$ en bon accord avec le résultat déduit des observations visuelles.

La région visuelle des spectres de Cérès et de Vesta ne présente pas de bandes d'absorption comme c'est le cas pour les grosses planètes. Ces astres ne possèdent pas d'atmosphère.

Bobrovnikoff a fait des enregistrements microphotométriques des spectres obtenus qui font ressortir la faible réflectivité des planétoïdes dans le violet et l'ultra-violet comme cela se produit pour les comètes. En particulier, les spectres continus de l'astéroïde N° 9 Métis et de la comète Halley au voisinage du périhélie offrent une ressemblance frappante.

Interprétation cosmologique de ces constatations. — On reconnaît généralement que les noyaux cométaires sont essentiellement constitués par une agglomération de matériaux météoriques. La réflexion spécifique de la lumière solaire par ceux-ci est susceptible d'entraîner l'affaiblissement d'intensité constaté expérimentalement dans le violet et l'ultraviolet. La dislocation d'un gros noyau cométaire pourrait donner lieu à des fragments réfléchissant la lumière du soleil comme les astéroïdes.

B. LYOT a étudié la lumière polarisée des planétoïdes. Les mesures polarimétriques sont susceptibles de fournir des renseignements précieux concernant la nature du sol des astéroïdes et leurs périodes de rotation.

9) Masse des astéroïdes.

Jusqu'ici aucune tentative n'a été faite pour déterminer par voie directe la masse d'un astéroïde isolé, mais on peut penser obtenir la masse totale de l'anneau des astéroïdes en se basant sur la théorie des perturbations.

On a évalué la masse des 1550 premiers astéroïdes à $\frac{1}{847}$ de la masse de la terre, soit $\frac{1}{2709} \cdot 10^{-6}$ de la masse du soleil.

P. HARZER et H. OSTEN ont déterminé la masse totale des astéroïdes en recourant à la théorie des perturbations. Voici leurs résultats:

Masse totale des astéroïdes.

P. Harzer $\frac{1}{6}$ ♁ ou $5 \cdot 10^{-7}$ ⊙

H. Osten $\frac{1}{12}$ ♁ ou $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ ⊙ [5]

En comparant les tables de Mars aux observations, Le VERRIER a conclu que la masse de l'anneau des astéroïdes ne saurait surpasser le $^1/_4$ de celle de la terre sans provoquer des perturbations inexplicables sur l'orbite de Mars. Les deux valeurs données ci-dessus sont inférieures à la limite assignée par Le Verrier.

10) Le groupe des planétoïdes troyens.

Une douzaine de petites planètes ont la propriété de former avec le soleil et Jupiter un triangle (à peu près) équilatéral. LAGRANGE a traité ce problème dans son «Essai sur le problème des trois corps» (1772). Le cas que le grand savant français considérait comme un cas idéal se trouve réalisé une douzaine de fois dans la nature.

On a donné à ces douze astéroïdes le nom de héros de la guerre de Troie: Achille, Patrocle, Hector, Nestor, etc. Ils ont tous été découverts par des astronomes de l'Observatoire de Heidelberg. 7 des planétoïdes troyens précèdent Jupiter dans son mouvement réel, et les 5 autres la suivent. Pour les distinguer, on a décidé de donner aux membres du premier groupe des noms de héros grecs et à ceux du second des noms de héros troyens. Pourtant cette convention n'ayant pas été admise dès le début, il y a un héros grec parmi les Troyens et un Troyen parmi les Grecs. Ce sont resp. Patrocle et Hector.

---

[5]) ♁ terre ⊙ soleil.

Les planétoïdes de chacun de ces groupes offrent dans leurs trajectoires des particularités saillantes. Ajoutons aussi que les oppositions de ces planètes s'échelonnent sur un intervalle de 1,5 mois environ.

11) Division du système des planétoïdes en anneaux.

KIRKWOOD a constaté que les parties de la zone des astéroïdes dans lesquelles il existe un rapport simple de commensurabilité entre la durée de révolution d'une petite planète et celle de Jupiter sont représentées par des lacunes semblables aux intervalles qui séparent les divers anneaux de Saturne. Au lieu de considérer les périodes on peut considérer les moyens mouvements μ. Rappelons que

$$\mu = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{T}$$

Cette formule donne μ en secondes, T étant exprimé en jours.

Soit μ le moyen mouvement d'un astéroïde, μ' celui de Jupiter. On a d'ailleurs $\mu' = 299''$.

Posons

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{p}{q}$$

où p et q sont de petits nombres premiers entre eux. [p—q] s'appelle le degré de commensurabilité.

En général, plus le nombre [p—q] est petit, et plus l'étendue des lacunes est grande. On a divisé le domaine des astéroïdes en 7 anneaux.

Toutefois il y a exception pour quelques degrés de commensurabilité. Au lieu de lacunes on constate pour ces degrés une accumulation d'objets. C'est le cas pour les degrés $^1/_1$, $^3/_4$, $^2/_3$.

$^1/_1$ appartient aux planétoïdes troyens, $^3/_4$ à ceux du type Thule, $^2/_3$ à ceux du type Hilda.

Une explication satisfaisante de ces faits a été donnée par le savant japonais K. HIRAYAMA, mais nous nous bornerons à cette indication.

12) Problèmes relatifs à l'étude du mouvement des planétoïdes.

Grâce aux positions très précises qu'on a obtenues pour certaines petites planètes on a pu réduire notablement les résidus provenant de la comparaison des résultats de la théorie et de l'observation. Rappelons qu'on appelle résidu la différence O-C, O étant la grandeur observée et C la grandeur calculée. Si, en général, les résidus disparaissent, il existe quelques petites planètes dont le mouvement

est très bien connu pour lesquelles les résidus ne disparaissent pas, mais présentent une allure systématique dont l'origine reste à trouver.

13) Importance de la planète Eros.

Pour déterminer l'unité fondamentale de l'astronomie (distance soleil-terre), on a besoin d'un astre assez brillant pour comporter des mesures précises et qui approche suffisamment de la terre. Eros offre à cet égard les conditions les plus favorables. Cette planète a été découverte en 1898 par WITT; sa durée de révolution est de 642 jours. Sa distance à la terre peut descendre au-dessous de 0,25 unités astronomiques. Lors de l'opposition 1900—1901 qui était très favorable, Eros a été suivie dans 17 observatoires dispersés dans les deux hémisphères et dont les observations faites optiquement et photographiquement ont conduit à la valeur 8",80 de la parallaxe solaire.

Auparavant on avait observé dans le même but Flora en 1875, Junon en 1874 et 1877, Victoria et Sapho en 1882. Comme la distance de Vénus à la terre peut descendre aussi à environ 0,25 unités astronomiques, cette planète est également avantageuse pour une bonne détermination de la parallaxe solaire, mais les passages de Vénus devant le disque solaire sont fort rares; le prochain n'aura lieu qu'en l'an 2004, et l'application de cette méthode, lors du dernier passage en 1882, n'a pas donné la parallaxe avec la précision qu'on comptait obtenir.

14) Origine des petites planètes.

Il n'y a pas de théorie absolument satisfaisante. Nous énumérerons rapidement les théories établies pour expliquer l'origine des planétoïdes:

a) explosion d'une planète d'après OLBERS et C. A. YOUNG;

b) anneau entourant le soleil disloqué sous l'influence des perturbations provoquées par Jupiter;

c) théorie de la capture; des astres errant dans l'espace auraient été captés en arrivant dans le système solaire.

d) anneau de Jupiter.

L'hypothèse à laquelle on accorde aujourd'hui encore le plus de crédit est la première. Les astéroïdes proviendraient en majeure partie d'un astre unique qui aurait été une planète. Les fragments provenant des couches externes de la grosse planète primitive seraient des silicates ou des silicates magnésiens relativement

légers, tandis que ceux formés à partir des métaux centraux lourds seraient assimilables aux sidérites [9]) tombées du ciel.

L'auteur de cet article a calculé des éphémérides pour les planétoïdes suivants:

Odysseus 1930
Isberga 1931

De février à mai 1943:

Nysa, Arethusa, Hecuba, Liberatrix, Eunike, Fringilla, Gertrude, Luscinia, Aguntina, Winchester, Armor, Helwerthia, Coppelia, Juliana, Sisigambis, Tanina Petropolitana, Rogeria, Poesia, Martina, Swasey, N° 1403 (1936 QA), Josè, Margot, N° 1454 (1936 DO), N° 1456 (1937 NG), Lilaea, Thule Larissa, Libya.

[9]) Carbonate naturel de fer.

Introduction sommaire à la théorie des ensembles

par

A. GLODEN.

La théorie des ensembles est une discipline importante des mathématiques modernes en raison des multiples applications qu'elle a trouvées dans d'autres branches des mathématiques, notamment dans la théorie des fonctions, la théorie des nombres, le calcul des probabilités.

Cette belle et féconde théorie est due à Georges CANTOR[1]) qui l'a créée «ab origine», n'ayant eu aucun précurseur.

La notion d'ensemble est familière à tout le monde. Les mathématiciens appellent *ensemble* une collection d'objets. Un ensemble peut être fini ou infini (transfini). Un ensemble est dit fini si le nombre d'éléments qui le constituent est fini, il est dit infini si ce nombre est illimité. L'ensemble des nombres naturels est infini, de même l'ensemble des points d'une droite, l'ensemble des points d'un segment de droite. G. Cantor a résolu l'audacieux problème de comparer, au point de vue de leurs grandeurs, les ensembles infinis.

Une notion indispensable pour comprendre les développements suivants est celle de *correspondance biunivoque*. Il existe entre les éléments de deux ensembles une correspondance biuniovque si à chaque élément de l'un correspond un élément et un seul de l'autre et réciproquement. Si entre les éléments de deux ensembles infinis on peut établir une telle correspondance, les deux ensembles sont dits *équivalents* ou de *même puissance*.

A. - Les ensembles dénombrables.

La puissance de l'ensemble des nombres naturels (entiers positifs) est désignée par le symbole aleph ℵ (lettre hébraïque).

---

[1]) Voir la note sur G. Cantor dans notre article «Les deux plus éminents historiographes des mathématiques», p. 77.

Il est facile de trouver des ensembles ayant la même puissance, p. ex. l'ensemble des nombres pairs. On peut établir une correspondance biunivoque entre les éléments de ces deux ensembles de la manière suivante:

Ensemble des nombres pairs: 2, 4, 6, 8, 10 . . .
Ensemble des nombres naturels: 1, 2, 3, 4, 5 . . .

Les nombres pairs ne constituant qu'un ensemble partiel de l'ensemble des nombres naturels, nous nous rendons compte de ce qu'un ensemble partiel peut avoir la même puissance que l'ensemble lui-même.

Tout ensemble ayant la même puissance que l'ensemble des nombres naturels est dit *dénombrable.*

On peut alors se poser la question suivante: Tous les ensembles sont-ils dénombrables?

Ensemble des nombres entiers positifs et négatifs.

Nous pouvons établir entre cet ensemble et celui des nombres naturels la correspondance biunivoque suivante:

Ensemble à étudier : 1, —1, 2, —2, 3, —3 . . .
Ensemble des nombres naturels: 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . .

Donc l'ensemble des nombres entiers positifs et négatifs est dénombrable.

Ensemble des nombres rationnels positifs.

Pour numéroter cet ensemble, on procède de la manière suivante. On considère un tableau à deux entrées et on écrit sur la 1re ligne les fractions ayant pour dénominateur un, rangées par ordre de grandeur. Sur la 2e ligne on écrit les fractions dont le dénominateur est 2, et ainsi de suite, comme le montre le tableau ci-après:

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	. . .
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	
⋮				

Pour établir entre les éléments de cet ensemble et celui des nombres naturels une correspondance biunivoque, on écrira l'élément $^1/_1$ de la première case, puis les éléments $^2/_1$, $^1/_2$ situés sur une diagonale à partir de la case $^2/_1$, puis les éléments $^3/_1$, $^2/_2$, $^1/_3$ situés sur une diagonale à partir de $^3/_1$, et ainsi de suite. Si un même nombre se reproduit dans la suite sous des formes différentes, on laissera seulement la 1re forme. On obtiendra la suite unique

$$1,\ 2,\ ^1/_2,\ 3,\ ^1/_3,\ 4,\ ^3/_2,\ ^2/_3,\ ^1/_4\ \ldots,$$

qui correspond d'une façon biunivoque à la suite des entiers naturels.

Ensemble des nombres algébriques.

Rappelons qu'on appelle *nombre algébrique* toute racine d'une équation algébrique. On peut se borner, sans restreindre la généralité, aux équations à coefficients entiers.

Voici maintenant un procédé pour numéroter les équations algébriques. Servons-nous encore d'un tableau à deux entrées. Inscrivons dans les cases de la 1re ligne uniquement des équations du 1er degré, dans celles de la 2e ligne uniquement des équations du 2e degré, et ainsi de suite. Convenons encore d'écrire dans les cases de la 1re colonne les équations dont la somme des valeurs absolues des coefficients égale 1, dans les cases de la 2e colonne celles dont la somme des valeurs absolues des coefficients égale 2, et ainsi de suite.

Toute équation trouvera sa place dans une case déterminée. Par exemple, l'équation $X^2 - 3X + 2 = 0$, s'inscrira sur la 2e ligne et dans la colonne de rang $1 + 3 + 2 = 6$.

Chaque case renferme plusieurs équations, mais celles contenues dans une même case sont en nombre fini.

Donc l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Remarquons qu'il s'agit ici de l'ensemble des nombres algébriques réels.

B. - Ensemble des nombres transcendants.

En 1844, LIOUVILLE démontra qu'il existe des nombres qui ne sont racines d'aucune équation algébrique. Il indiqua également un procédé pour construire de tels nombres. Les nombres non algébriques sont appelés les nombres *transcendants*. HERMITE a démontré en 1873 la transcendance de e, LINDEMANN en 1882 celle du nombre π.

En 1873 CANTOR a démontré qu'il existe une infinité de nombres transcendants entre deux nombres donnés aussi rapprochés que l'on veut, par exemple 0 et 1. En outre, il a démontré par une méthode appelée *procédé de la diagonale* que la puissance des nombres trans-

cendants compris entre 0 et 1 et de l'ensemble de tous les nombres transcendants est supérieure à celle du dénombrable. Nous ne reproduisons pas cette démonstration pour laquelle nous renvoyons le lecteur aux traités sur la théorie des ensembles.

Un ensemble qui a la même puissance que l'ensemble de tous les nombres, algébriques et transcendants, compris entre 0 et 1, est dit avoir la *puissance du continu*. On démontre que l'ensemble des nombres transcendants a la puissance du continu.

C. — Ensembles de puissance supérieure au continu.

Existe-t-il des ensembles dont la puissance est supérieure à celle de tous les nombres compris entre 0 et 1? On démontre facilement qu'il n'en est rien de l'ensemble des nombres compris entre 0 et 2, et plus généralement, de l'ensemble des nombres entre $-\infty$ et $+\infty$, mais que ces deux ensembles ont la puissance du continu.

L'ensemble des points situés à l'intérieur d'un carré semble avoir une puissance supérieure à celle de l'ensemble des points sur un côté du carré. Il n'en est rien. La démonstration facile, bien que très artificielle, est due à Cantor. Nous nous bornerons à signaler ce résultat d'apparence paradoxale. On démontre de même que l'ensemble des points situés dans un cube a la même puissance que celui de tous les points situés sur un segment égal à l'arête du cube, et d'après ce qui a été dit précédemment, la même puissance que tous les points situés sur un segment égal à l'unité.

Les exemples considérés n'ont donc pas de puissance supérieure à celle du continu.

On démontre que l'*ensemble des fonctions* d'une variable, continues et discontinues, a une puissance supérieure à celle du continu.

Etant donné un ensemble on peut toujours en former un de puissance supérieure. Il n'y a donc pas de puissance supérieure à toutes les autres. Pour éviter une contradiction, on est obligé de convenir que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

Nous terminons en énonçant le problème dit du continu: Existe-t-il des ensembles dont la puissance est supérieure à celle du dénombrable et inférieure à celle du continu? A l'heure actuelle on ne connaît pas la réponse à cette question.

NOTE.

Le lecteur désireux d'approfondir les développements précédents pourra consulter p. ex. «L'Infini Mathématique», par Gustave VERRIEST, professeur à l'Université de Louvain, Paris, 1926.

Le lecteur mathématicien pourra consulter (p. ex.):

1) Emile BOREL, Leçons sur la Théorie des fonctions, Paris, 1914.

(Les trois premiers chapitres se rapportent à la théorie des ensembles. Plusieurs notes à la fin de l'ouvrage sont également consacrées à cette théorie).

2) HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, Veit, 1914.

3) SCHOENFLIES, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.

4) A. FRAENKEL, Einleitung in die Mengenlehre, Berlin, Springer, 1923.

5) N BOURBAKI, Théorie des ensembles, Paris, Hermann.

6) Paul DUBREIL, Algèbre, Tome I, Paris, Gauthier-Villars, 1946.
(Le chap. I^{er} traite des ensembles et des correspondances).

Quelques problèmes de la Théorie des Nombres à la lumière des mathématiques modernes

par

A. GLODEN.

A. - Décomposition en nombres premiers.

Un nombre entier qui n'est pas premier, ne peut être décomposé que d'une seule manière en facteurs premiers. Les Grecs avaient connaissance de ce théorème avant EUCLIDE.

Un nombre premier est décomposable en facteurs complexes. Exemple: $29 = (3+2\sqrt{-5})\ (3-2\sqrt{-5})$. Dans la théorie des idéaux (nombres idéaux) on démontre que tout nombre est décomposable seulement d'une manière en facteurs premiers idéaux. Voici cette décomposition pour 29: $29 = \sqrt{11+12\sqrt{-5}}\sqrt{11-12\sqrt{-5}}$ obtenue à partir de $29^2 = 11+5-12^2$. Les facteurs $\sqrt{11+12\sqrt{5}}$ et $\sqrt{11-12\sqrt{5}}$ sont des exemples de facteurs premiers idéaux. Nous avons donné ici des idéaux pour des nombres algébriques de la forme $x+y\sqrt{-5}$. KUMMER[1]) a donné la forme des nombres premiers idéaux pour des nombres algébriques de la forme

$$a + b\,\zeta + c\,\zeta^2 + \cdots + k\,\zeta^{p-1},$$

p étant un nombre premier impair et ζ une pième racine complexe de l'unité.

B. - Il y a une infinité de nombres premiers.

Ce théorème se trouve dans les ouvrages d'Euclide (323—280 a .J.-Chr.).

---

[1]) Kummer Edouard, professeur à l'Académie de Berlin, 1810—1893.

C. - Le plus grand nombre premier actuellement connu.

C'est le nombre $2^{127}-1$. Ce nombre, qui a 39 chiffres, rentre dans la catégorie des nombres de MERSENNE.[2]) LUCAS a établi sa primalité.[3])

D. - Distribution des nombres premiers.

Dans une centaine de nombres premiers consécutifs dont le plus petit est supérieur à 17 il y a tout au plus 23 nombres premiers. De 18 à 117 il y a effectivement 23 nombres premiers. De 118 à 217 il y en a 17.

Le problème de la fréquence des nombres premiers en parcourant la suite des nombres naturels a retenu l'attention de plusieurs grands mathématiciens. Parmi les modernes nous nommons HARDY, LITTLEWOOD, INGHAM, LANDAU.

La somme $\Sigma \frac{1}{p}$, p désignant un nombre premier, est divergente. EULER se sert de ce résultat pour démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers. La somme $\Sigma \frac{1}{p^2}$ est convergente, comme la somme $\Sigma \frac{1}{n^2}$ où n désigne un entier queconque. On rencontre beaucoup plus de nombres premiers que de carrés dans la suite des nombres naturels.

HADAMARD et de la VALLEE-POUSSIN ont démontré un théorème prévu par GAUSS: Si l'on désigne par $\Pi(n)$ le nombre des nombres premiers $\leqq n$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Pi(n) \log n}{n} = 1$$

Pour la démonstration on pose $\Pi(n) = \frac{n}{\log n}[1+\varphi(n)]$ et on démontre que $\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = 0$.

---

[2]) Les nombres de Mersenne ont la forme 2^n-1, où n est permier. On leur a donné ce nom par suite de l'affirmation de Mersenne (savant religieux français, 1588—1648) que pour $n<257$ ces nombres sont composés sauf pour un certain nombre de valeurs de n qu'il a indiquées et dont les plus petites sont 2, 3, 5, 7. Plusieurs mathématiciens ont redressé à partir de 1883 quelques erreurs que contient cette affirmation de Mersenne.

[3]) Lucas Edouard, mathématicien français, 1842—1891, a donné une méthode pour rechercher le caractère de primalité des nombres de Mersenne.

Ce résultat s'obtient par la considération de la fonction ζ (s)

$$\zeta(s) = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

n étant entier > 0 et $s = \sigma + i\tau$. On sait que cette série appartenant au type des séries de DIRICHLET est convergente pour $\sigma > 1$.

E. - Théorème de DIRICHLET[4]) sur les progressions arithmétiques.

Toute progression arithmétique

$$a,\ a + r,\ a + 2r,\ a + 3r,\ \ldots$$

dans laquelle a et r sont premiers entre eux, renferme une infinité de nombres premiers.

Nous savons que la suite 1, 3, 5, 7 . . . renferme une infinité de nombres premiers. Dans cette suite $a = 1$, $r = 2$. Si a et r ont un diviseur commun $q > 1$, la suite ne renferme aucun nombre premier. Elle en renferme un seul si a est premier et $r = a$. On peut donc se poser la question si la suite

$$a,\ a + r,\ a + 2r,\ a + 3r,\ \ldots$$

dans laquelle a et r sont premiers entre eux, renferme une infinité ou un nombre fini de nombres premiers.

La démonstration donnée par Dirichlet en 1837 est difficile. Dans le théorème il s'agit d'entiers; Dirichlet le démontre en se basant sur l'analyse. Jusqu'à ce jour on n'a pas réussi à démontrer le théorème de Dirichlet dans son ensemble par des procédés élémentaires. On l'a fait toutefois dans des cas particuliers tels que les suivants: Il y a une infinité de nombres premiers des formes $4m \pm 1$, $3m \pm 1$.[5])

Les Grecs connaissaient déjà le résultat suivant: Entre un nombre premier p et le nombre $1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p$ il y a au moins un nombre premier.

F. - Postulat de BERTRAND[6]) *(énoncé en 1845):*

Entre n et 2n (n $(n > 1)$ il y a toujours un nombre premier.

Le postulat a été démontré par TCHEBYCHEFF[7]) en 1852.

---

[4]) Dirichlet, mathématicien allemand, 1805—1859.

[5]) Dr Arnold SCHOLZ, Einführung in die Zahlentheorie, Satz 49, page 70 (avec démonstration).

[6]) Bertrand Joseph, mathématicien et historien français, 1822—1900.

[7]) Tchebycheff, professeur à l'Université de St. Pétersbourg, 1821—1894.

On sait aujourd'hui que pour $n > 23$, il y a un nombre premier entre n et $n + \frac{n}{4}$; pour $n > 47$, il y en a un entre n et $n + \frac{n}{8}$.

Par contre, on ne sait pas si entre n^2 et $(n+1)^2$, il y a toujours un nombre premier.

G. - Nombres premiers jumeaux.

Voici quelques exemples: 3,5; 11, 13; 101, 103 . . .

Le nombre des nombres premiers jumeaux est-il infini? Ce problème n'est pas encore résolu.

3, 5, 7 est le seul triplet de la forme n, $n+2$, $n+4$, car de cette suite un nombre est toujours divisible par 3. Mais on a des triplets de la forme n, $n+2$, $n+6$. Exemple: 41, 43, 47. On a également des quadruplets. Exemples: 11, 13, 17, 19;

299 471, 299 473, 299 477, 299 479.

La question de savoir s'il y a une infinité de triplets et de quadruplets n'est pas non plus résolue.

H. - Problème de GOLDBACH

(énoncé en 1742 dans une lettre à Euler):

Un nombre pair est la somme de deux nombres premiers.

Exemples: $8 = 5 + 3$; $16 = 11 + 5 = 13 + 3$.

Cette affirmation n'a pas été démontrée malgré les efforts des plus grands mathématiciens. Les premiers résultats décisifs furent obtenus en 1922. Une méthode nouvelle fut introduite par RAMANUJAN [9]), HARDY et LITTLEWOOD.

I. - Théorème de SCHNIRELMANN [10])

Schnirelmann a démontré en 1930 le théorème suivant: Il existe un nombre naturel N tel qu'on peut exprimer tout nombre naturel à l'aide d'une somme comportant au plus N nombres premiers.

---

[8]) Goldbach, 1690—1764.

[9]) Ramanujan, 1887—1920.

[10]) Schnirelmann, 1907—1938.

D'après les assertions de Schnirelmann la valeur de N est voisine de 1.000.000. En 1936 d'autres mathématiciens ont démontré que tout nombre suffisamment grand est la somme de 71 nombres premiers au plus. En 1937 a été démontré le théorème: Tout nombre premier suffisamment grand est la somme de trois nombres premiers. [11])

I. - Conclusion.

On ne peut espérer résoudre les problèmes en suspens que par l'analyse et non par des méthodes élémentaires. C'est par l'application des théorèmes du continu qu'on peut espérer triompher des difficultés soulevées en mathématiques par le discontinu.



[11]) C. R. Ac. de Paris, 1937.

Les deux plus éminents historiographes des mathématiques

par

A. GLODEN.

Parmi les historiographes des mathématiques il y en a deux qui ont légué à la postérité une œuvre monumentale; ce sont MONTUCLA et Moritz CANTOR.

A 1. *La vie et les travaux de MONTUCLA (1725—1799).*

Jean-Etienne Montucla naquit à Lyon de parents peu fortunés. Son père était négociant et le destinait à la même profession. Mais au collège des Jésuites de Lyon où son père l'avait envoyé, Montucla ne tarda pas à révéler des aptitudes brillantes. Ce collège était d'ailleurs un des plus célèbres que les Jésuites aient jamais eu. Montucla y prit cette connaissance intime des langues anciennes qui lui permit après de se familiariser aisément avec les langues modernes. Ainsi il apprit l'italien, l'anglais, l'allemand, le hollandais.

M. conserva toute sa vie beaucoup de reconnaissance pour les Jésuites. Ceux-ci formèrent également les mathématiciens de LALANDE et BOSSUT; ce dernier était devenu lui-même jésuite. M. se sentait entraîné vers les mathématiques qui étaient très honorées de ses professeurs.

A seize ans il avait perdu son père, et l'aïeule restée protectrice de son éducation ne survécut que quatre ans. Après avoir fini ses études à Lyon, M. alla faire son droit à Toulouse. A cette époque tout homme qui n'entrait pas dans l'armée croyait se devoir cet accroissement d'instruction.

Puis M. vint à Paris, et les réunions auxquelles il assista chez le libraire JOMBERT exercèrent une influence décisive sur ses préoccupations intellectuelles. Le magasin de ce libraire était devenu le chef-lieu de la librairie des sciences et des arts. Sa bonne humeur et les agréments de sa femme firent que bien des hommes éminents se rencontrèrent dans sa maison. M. y lia connaissance avec DIDEROT, d'ALEMBERT, de GUA, de LALANDE, l'architecte

BLONDEL et d'autres personnalités célèbres. Au cours de ces réunions il sentit la nécessité de coordonner les connaissances mathématiques dont il trouvait autour de lui tant de matériaux épars.

Il a donné une réédition des «Récréations mathématiques d'OZANAM» [1]). Grâce à l'étendue de ses connaissances il s'était fait remarquer à Paris et la Gazette de France se l'était attaché. Désormais à l'abri du besoin il rassembla les matériaux de son «Histoire des Mathématiques» dont les deux premiers volumes parurent en 1758. Ils avaient été précédés d'une «Histoire des recherches sur la quadrature du cercle» publiée en 1754.

«L'Histoire des Mathématiques» assura à son auteur une place distinguée dans le monde savant. Dès 1755 d'ailleurs l'Académie de Berlin se l'était associé. Dans les deux volumes publiés Montucla s'était arrêté à la fin du 17° siècle; de tous côtés on le sollicitait d'aborder le 18° siècle pour lequel il annonçait un 3° volume.

Mais son caractère paisible l'éloigna des sociétés bruyantes de Paris. C'est ainsi qu'il fut attiré à Genoble en 1761 comme secrétaire de l'intendance. Il s'y maria en 1763 avec Marie-Françoise Romand. Le chevalier Turgot ayant été chargé en 1764 de former une colonie à Cayenne, il demanda comme premier secrétaire M. qui joignit à ce titre celui d'astronome du roi. De retour en France, il devint d'abord premier commis des bâtiments, puis administrateur des arts et manufactures à Versailles. Pendant plus de 25 ans il s'occupa avec assiduité de ses fonctions administratives. Il n'oublia toutefois pas son «Histoire des Mathématiques» dont l'édition était épuisée depuis longtemps, mais il le faisait en secret pour que le directeur-général des bâtiments ne le soupçonnât pas de négliger ses fonctions.

Il était très estimé des savants. de Lalande fut chargé de lui offrir une place dans l'Académie des Sciences; il la refusa sachant qu'il n'aurait pas assez de loisir pour la remplir.

De nombreux invités se réunissaient chez lui à Versailles, mais s'il paraissait à ces réunions, ce n'était que pour quelques minutes et comme pour trouver une nouvelle vigueur à ses travaux. Il parlait avec aisance, mais avec simplicité et sans prétention.

A la Révolution il perdit tout en perdant sa place. de Lalande le pressa alors de publier une nouvelle édition de «l'Histoire des Mathématiques» et détermina l'éditeur PANCKOUCKE à le dédommager de ses pertes.

M. publia le 7 août 1799 les deux premiers volumes avec des améliorations importantes. En même temps il faisait imprimer le 3° volume qu'il ne put conduire que jusqu'à la page 336. Les tomes

[1]) Mathématicien français, 1640—1717.

III et IV furent publiés par l'astronome Jérôme de LALANDE en mai 1802 (an X).

M. fut de l'Institut National dès sa création. Le gouvernement de 1795 fit appel à lui, le chargeant de l'analyse des traités déposés aux Archives des affaires étrangères, et en 1794 il fut porté sur le premier état des gratifications assignées par le Comité de salut public.

Nommé professeur de mathématiques d'une école centrale à Paris, le mauvais état de sa santé ne lui permit pas d'accepter ce poste.

Il mourut le 18 décembre 1799, l'année même de la publication de la nouvelle édition de son «Histoire des Mathématiques», des suites d'une rétention d'urine, laissant une fille mariée et un fils employé dans les bureaux de l'intérieur.

2. *L'«Histoire des Mathématiques» par Montucla.*
(tomes III et IV achevés et publiés par J. de Lalande).

C'est une histoire des mathématiques pures et appliquées des origines jusqu'au 18e siècle.

Le tome I contient l'Histoire des mathématiques avant le 17e siècle,
» » II » » » » pendant le 17e siècle;
les tomes III et IV contiennent l'Histoire des mathématiques pendant le 18e siècle.

(On y trouve également l'histoire de l'astrologie, l'histoire de la musique).

On pourrait appeler l'ouvrage une histoire de la science du point de vue mathématique.

Il est vrai qu'il y a bien des lacunes, bien des documents ayant manqué à M. Il ne connaissait d'ailleurs ni l'arabe ni l'hébreu.

Certains critiques ont émis des doutes que M. fût à la hauteur de la tâche gigantesque qu'il avait entreprise. Il n'a publié aucun mémoire original de mathématiques. Dans le troisième tome de son «Histoire des mathématiques» il ne fait pas preuve d'un sens critique assez aigu; surtout le 18e siècle aurait dû être traité par une personne ayant des connaissances mathématiques bien plus étendues que lui. Montucla lui-même se rendit compte de l'insuffisance de ses connaissances eu égard à la difficulté de son sujet. Le 7 août 1799 il s'exprima ainsi à de Lalande: «Plus j'y réfléchis, plus je vois par les difficultés que j'éprouve, que j'ai été un téméraire d'entreprendre un pareil ouvrage. Je suis réduit à dire que je m'en tirerai comme je pourrai.» (Tome III de l'«Histoire des Mathématiques», page VII).

Mais l'ouvrage de M. témoigne de recherches consciencieuses et c'est le premier ouvrage qui mérite vraiment le nom d'Histoire des Mathématiques.

D'après George SARTON,[2]) le grand historien des sciences de notre époque, les historiens des sciences ne peuvent se passer de l'«Histoire des Mathématiques» de M., surtout en ce qui concerne le 17° et le 18° siècle. C'est le plus bel hommage qu'on puisse rendre à sa mémoire. Surtout le 2d tome (17° siècle) a encore de la valeur aujourd'hui.

Ajoutons que l'ouvrage ne peut être consulté avec fruit que par des initiés.

3. *Quelques extraits de l'«Histoire des Mathématiques»* par Montucla.

On lit dans la Préface:

«Je m'étais, à la vérité, d'abord borné à l'histoire de la géométrie et des mathématiques pures; mais la crainte de faire un ouvrage qui n'eût intéressé qu'un trop petit nombre de lecteurs, et les exhortations de quelques personnes, me firent étendre mon plan jusqu'à l'histoire générale des mathématiques. Peut-être eussé-je mieux fait de m'en tenir à mon premier projet.»

Il signale dans la Préface les ouvrages des anciens sur la matière, ce sont uniquement des traités isolés.

Je cite encore cet alinéa de la Préface:

«WALLIS publia, en 1684, une histoire de l'algèbre, sous le titre latin Algebrae tractatus historicus et practicus... Son auteur semble n'avoir connu qu'un homme, savoir HARRIOT.[3]) On dirait que l'algèbre et tous ses procédés les plus ingénieux sont nés entre ces mains. J'ai mis cela dans le plus grand jour en divers endroits de cette histoire.»

Voici un exemple qui montre avec quelle minutie M. procède. Il s'agit de l'histoire des explications de l'arc-en-ciel. Je rappelle que l'arc-en-ciel inférieur s'explique par les phénomènes suivants subis par un rayon solaire dans une goutte d'eau: réfraction, réflexion, réfraction. L'arc-en-ciel supérieur s'explique par les mêmes phénomènes suivis d'une deuxième réflexion.

M. dit qu'on a expliqué d'abord l'arc-en-ciel par la réflexion seule. Mais ceci ne peut être, la réflexion d'un faisceau non coloré ne produisant jamais de couleur. Marc Antoine de DOMINIS, le malheureux archevêque de Spalatro, arrêté et enfermé à l'Inquisition où il mourut en 1611, entrevit le vrai fondement de l'explication de l'arc-en-ciel intérieur (2 réfractions et 1 réflexion).

---

[2]) Associate of the Carnegie Institution of Washington, Professor in Harvard University, directeur de la revue Isis.

[3]) Mathématicien anglais, 1568—1621.

D'après M., DESCARTES est incontestablement le premier qui ait donné une explication valable du 2° arc-en-ciel (extérieur) en parlant de la double réflexion que subit dans la goutte le rayon solaire.

Et M. ajoute:

«Le professeur KLUGEL m'accuse d'une partialité trop grande envers Descartes, qui est, dit-il, mon héros ou mon idole. Oui, sans doute, Descartes est mon héros où il doit l'être. Je l'ai vengé, Descartes que Wallis, dans son Histoire de l'Algèbre traite de plagiaire, et lui accorde à peine le titre de médiocre géomètre, quoiqu'une des plus belles découvertes de l'esprit géométrique soit celle d'exprimer la nature des courbes par des équations algébriques lui soit due».

Querelle entre NEWTON et LEIBNIZ au sujet de l'invention du calcul différentiel.

M. y prend fait et cause pour Newton.

«Leibniz eût dû être plus équitable envers Newton; il eut à cet égard des torts qui furent le germe de cette querelle».

«Les faits attestent l'antériorité de Newton sur Leibniz, en ce qui concerne l'invention et la possession de ce calcul».

«L'extrême amitié qui liait BERNOULLI avec Leibniz, l'entraîna, à l'égard de Newton, dans des procédés injustes. Il prétendit entre autres que Newton n'avait jamais connu les règles de la seconde différentiation, ou celle de prendre la fluxion d'une fluxion se basant sur ce que Newton dit dans son traité De qradratura curvarum: «que les fluxions des différents degrés sont représentés par les termes de son binôme

$$z^m + m z^{m-1} \dot{z} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^{m-2} \dot{z}^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^{m-3} \dot{z}^3 + \ldots,$$

la première fluxion $\dot{z}$ étant supposée constante.» Cela n'est vrai que si l'on supprime les dénominateurs. Mais il est évident que c'était une pure inadvertance de Newton.»

Dans cette partie de son histoire M. manque de sens critique. Aujourd'hui tous les historiens des mathématiques sont d'accord pour reconnaître que Newton et Leibniz se partagent la gloire d'avoir inventé le Calcul Infinitésimal. Ils sont complètement d'accord sur le fond, mais on trouve dans la forme qu'ils ont adoptée l'empreinte de leurs génies si dissemblables. Leibniz part de considérations géométriques, Newton de considérations mécaniques.

Il est vrai que Leibniz a publié sa méthode avant Newton, mais on sait les hésitations qu'éprouvait ce dernier à publier ses travaux, et l'hypothèse qu'il était en possession de sa méthode avant la publication du mémoire afférent de Leibniz est parfaitement justifiée.

B 1. *La vie et les travaux de Moritz CANTOR* (1829-1920).

M. Cantor est né à Mannheim en 1829. Il appartient à une famille israélite du Portugal émigrée au Danemark, dont une branche est allée s'établir à Amsterdam, où est né le père de M. Cantor, tandis qu'une autre branche, d'où est sorti le mathématicien Georg Cantor [4]), se fixait en Russie.

M Cantor fit des études aux Universités de Heidelberg et de Gœttingue, où STERN lui donna le goût des recherches historiques. Après avoir fait son doctorat à Heidelberg avec une dissertation inaugurale «Sur le système coordonné entre l'abscisse et l'arc de courbe» il suivit à Berlin les cours de LEJEUNE-DIRICHLET. Il fut nommé privat-docent à Heidelberg en 1853, professeur extraordinaire en 1863, professeur honoraire en 1877.

Après avoir publié en 1855 «Grundzüge einer elementaren Arithmetik» il rédigea en 1858 avec ses collègues de Heidelberg un journal intitulé «Kritische Zeitschrift für Chemie, Physik u. Math.», et il entra en 1859 dans la rédaction du journal «Zeitschrift für Mathematik u. Physik (SCHLÖMILCH et CANTOR)», dont il rédigea la partie historique, séparée depuis 1876. En 1863 parut à Halle son premier volume sur l'histoire des mathématiques: «Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker». En 1875 il publia «Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst». En 1882 sortit à Leipzig son 1er volume des «Vorlesungen über Geschichte der Mathematik», qui comprend l'histoire des mathématiques depuis les temps les plus reculés jusqu'à 1200 après J.-Chr. L'ouvrage entier comporte 3 volumes, dont le dernier fut publié en 1901. Ils font autorité en la matière. C. y donne des détails sur la vie et l'œuvre des mathématiciens depuis l'origine de la civilisation jusqu'en 1758.

En dehors d'un mémoire spécial, «Das Gesetz im Zufall», publié en 1877, Cantor a écrit un grand nombre d'articles touchant l'histoire des mathématiques. Il a rédigé aussi les biographies des mathématiciens allemands dans la grande encyclopédie de DUNCKER et

[4]) Cantor Georg Ferdinand Ludwig Philipp; mathématicien allemand, né à St. Pétersbourg en 1845. Il a publié à Leipzig en 1863 «Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre», constituant de toutes pièces la théorie des ensembles. Il a approfondi la notion de l'infini dans sa théorie des transfinis.

HUMBOLD (Leipzig), commencée en 1875. Par la hardiesse et l'ingéniosité de ses vues exprimées dans ses articles et ses ouvrages C. a joué un rôle prépondérant.

Voici le jugement qu'a porté sur lui le mathématicien français P. TANNERY: «S'il n'a pas été précisément le premier à commencer le renouvellement de l'histoire des mathématiques et à y introduire les procédés d'information et de critique qui y ont fait défaut jusqu'à notre siècle, il n'en est pas moins le véritable chef d'école dont l'imitation se perpétuera à l'avenir, et si quelques-unes de ses opinions peuvent prêter matière à contestation, son nom ne leur en donne pas moins une singulière autorité».

B 2. *Appréciation de l'œuvre de Montucla par Cantor.*

C. a donné dans son cours de nombreuses références à Montucla. Ayant vécu dans l'intimité spirituelle de M. pendant 30 ans, il a connu toutes les qualités et toutes les imperfections de son œuvre. Dans l'ensemble, sa critique est favorable à M. Il apprécie l'œuvre de celui-ci en ces termes: «Je serais heureux si les historiens des mathématiques qui viendront après moi étaient d'accord à considérer que les progrès que j'ai fait faire à l'histoire des mathématiques depuis M. revêtent une importance égale à la moitié de celle qui caractérise les progrès accomplis de VOSSIUS [4]) à M.

Note.

Le mathématicien italien Gino LORIA a émis dans «L'Intermédiaire des Recherches Mathématiques» [5]) l'idée d'écrire une Histoire Universelle des Mathématiques arrêtée à la fin du 19e siècle. Il a établi un plan d'après lequel cet ouvrage pourrait être réalisé. Le travail devrait être réparti entre un certain nombre de savants de divers pays sous l'égide des grandes corporations scientifiques existant en Europe et en Amérique, ou de l'Union Mathématique Internationale dont on envisage l'organisation.

---

[4]) VOSSIUS (ou Voss), savant allemand, 1577—1649; a publié entre autres des ouvrages sur les historiens de l'Antiquité.

[5]) Tome 2, fasc. 8, 0685, pp. 122—123.

et elle s'occupe de certaines classes d'équations différentielles. BARTOLOTTI a dit que cet ouvrage d'A. était un des premiers livres sur l'Analyse Infinitésimale et le plus complet. Le marquis de l'HOSPITAL avait publié en 1696 l'«Analyse des infiniment petits», révélant ainsi au grand public les mystères du nouveau calcul réservés jusqu'alors à quelques privilégiés. L'ouvrage d'A. avait des qualités qui lui valurent d'être traduit en français, en 1775, sous la direction de BOSSUT, et en anglais, en 1801, par COLSON. On en a dit que c'était la meilleure introduction aux ouvrages d'EULER.

A. a également traduit le «Traité Analytique des Sections coniques» du marquis de l'Hospital sans jamais publier la traduction.

Son père était professeur de mathématiques et de philosophie à l'Université de Bologne. En 1750 elle fut désignée par le pape Benoît XIV pour remplacer son père pendant sa maladie. D'après certains auteurs elle s'acquitta de cette tâche pendant deux ans jusqu'à la mort de son père. [2]) Toutefois, d'après l'«Enciclopedia Italiana» elle n'a jamais enseigné.

M. G. A. n'aimait point la société à laquelle elle était pourtant habituée aux nombreuses réceptions organisées dans la maison de son père. Elle avait exprimé le désir d'entrer dans l'ordre des Sœurs Bleues, ainsi nommées d'après leurs vêtements d'azur, mais il semble que son père réussit à la faire changer d'idée. On a relevé des contradictions au sujet des détails donnés par divers auteurs sur la dernière partie de sa vie. MONTUCLA par exemple a écrit dans son «Histoire des Mathématiques» qu'effectivement elle était entrée dans cet ordre. Même si ceci était vrai, elle n'y serait pas restée jusqu'à la fin de sa vie, cet ordre ayant été supprimé en 1782, 17 ans avant sa mort survenue en 1799. A. avait donc atteint l'âge de 81 ans. D'après l'Enciclopedia Italiana elle était devenue directrice d'un hospice, consacrant toutes ses forces à soulager les malades et les vieillards.

Si A. n'est pas une mathématicienne ayant produit des travaux originaux, on doit reconnaître que son influence n'a pas été négligeable. En 1899 on a célébré à Milan le centenaire de sa mort.

Sophie GERMAIN (1776—1831).

Cette mathématicienne française fut prise de passion pour les mathématiques en lisant le récit de la mort d'Archimède. Elle s'instruisit seule sur des livres et des cahiers d'élèves qu'elle se procura. Elle soumit à LAGRANGE des observations écrites en se donnant comme un élève de l'Ecole Polytechnique, de cette façon elle fut mise en

[2]) The Walking Polyglot by Sister Mary Thomas à Kempis, Scripta Mathematica, Vol. VI, N° 4, p. 215.

Trois mathématiciennes célèbres

par

A. GLODEN.

Il n'est pas rare qu'on trouve, dans la littérature mathématique d'aujourd'hui, des ouvrages et des articles originaux dus à des femmes. Dès qu'on leur a rendu accessibles les carrières libérales, leur contribution aux progrès de la science a augmenté considérablement. Si dans le domaine des mathématiques le nombre des femmes créatrices n'est pas très élevé, il convient de dire que l'œuvre de quelques-unes d'entre elles a été assez importante pour laisser des traces et même pour tracer dans le champ des recherches des sillons que d'autres mathématiciens ont suivis.

Nous parlerons dans cet article de la vie et des travaux de trois mathématiciennes: Maria AGNESI, Sophie GERMAIN et Sophie KOVALEVSKI.

Maria Gaetana AGNESI (1718—1799).

M. G. Agnesi naquit à Milan en 1718. Encore très jeune elle apprit le latin; à treize ans elle connaissait bien le grec, l'hébreu, le français, l'espagnol et d'autres langues. En 1783 elle publia ses «Propositiones Philosophicae», dans lesquelles des questions de logique se mêlent à des développements concernant la physique, la mécanique, les corps célestes. Ses «Instituzioni Analitiche» furent publiées en 1748. C'est son ouvrage le plus important; il tient compte des progrès accomplis dans le nouveau calcul depuis ses origines; A. y a incorporé les résultats de notes ayant paru dans les Acta eruditorum de Leipzig et dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. La première partie des Instituzioni est consacrée à l'analyse des quantités finies; elle y étudie les courbes, et entre autres, la Versiera.[1]) Dans la 2e partie elle donne le Calcul infinitésimal

[1]) FERMAT avait rencontré la cubique $(a^2-x^2)\,y = a^3$. A. l'a mentionnée dans les «Instituzioni» en l'appelant la Versiera, mais ce nom est dû à GRANDI, qui a étudié la courbe en 1703. On l'a appelée la Sorcière d'Agnesi (Witch of Agnesi) et on la désigne encore aujourd'hui sous le nom de cubique d'Agnesi.

relation avec ce savant. Elle entretint de même, sous un pseudonyme masculin, une correspondance de plusieurs années avec GAUSS. Ele arriva à la célébrité en remportant en 1816 le prix proposé par l'Académie des Sciences de Paris pour son «Mémoire sur les vibrations des lames élastiques», question mise au concours trois fois de suite après les expériences de CHLADNI. Elle présenta d'ailleurs d'autres mémoires concernant les surfaces élastiques et ils furent imprimés en 1821 et complétés plus tard par de nouvelles recherches sur la même question. Elle fournit à LEGENDRE pour la 2° édition de sa Théorie des nombres (1825) un certain nombre de propositions intéressantes et proposa dans le «Journal de CRELLE» (1831) une nouvelle théorie de la courbure des surfaces. Elle s'occupa également du grand théorème de FERMAT. [3])

A sa mort elle laissa un grand nombre de manuscrits sur les sujets les plus divers. Son neveu LIBERBETTE publia ses «Considérations sur l'état des sciences et des lettres aux différentes époques de leur culture.»

Sophie KOVALEVSKI [4]) *(1850—1890).*

[5]) Cette mathématicienne naquit à Moscou. «Elle poursuivit ses études scientifiques d'abord à Heidelberg, ensuite à Berlin, où elle sut conquérir l'estime et l'amitié de WEIERSTRASS. Elle resta sous sa direction pendant quatre années consécutives, et en 1874 l'Université de Gœttingue lui décerna sans examen le grade de docteur en philosophie, sur la production de deux thèses, dont celle «Sur la théorie des équations aux différences partielles» a une grande valeur. Puis, tout en continuant ses recherches d'analyse, elle fut nommée en 1884 grâce à l'appui de MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Ecole supérieure de Stockholm, où son enseignement obtint un vif succès. Peu après elle remporta le prix BORDIN (1888), une des plus hautes distinctions accordées par l'Académie des Sciences de Paris, avec le sujet suivant: «Perfectionner en un point important la théorie du mouvement d'un corps solide». On lui décerna solennellement cette récompense, dont la valeur fut doublée en raison du service extraordinaire rendu à la Physique mathématique. Elle avait découvert un nouveau cas dans lequel les équations différentielles d'un corps

---

[3]) Voir dans «Le dernier théorème de Fermat» par MORDELL, Paris, 1929, — § *22*. — Résultat de Sophie Germain, pp. *36—39*.

[4]) On trouve plusieurs orthographes de son nom. Dans le «Larousse Universel» en deux volumes on lit: KOVALEVSKA (Sonia CORVIN-KRUKOVSKI, M^me^).

[5]) Reproduit d'après BOYER, Histoire des Mathématiques, Paris, 1900, pp. *226—229*.

pesant, mobile autour d'un point fixe, peuvent s'intégrer. On lui doit aussi des travaux sur les intégrales abéliennes. Elue en 1890 correspondante de l'Académie de St-Pétersbourg, cette savante dont le talent en pleine maturité donnait tant d'espérances, s'éteignit le 10 février de la même année.

Sa mort éveilla bien des sympathies et de tous les coins du monde civilisé, depuis la Société Royale de Londres jusqu'à l'école primaire de Tiflis, des télégrammes de condoléances parvinrent au recteur de l'Université de Stockholm. Ses funérailles furent royales, des monceaux de fleurs ornèrent son tombeau, les journaux mathématiques lui consacrèrent des articles nécrologiques émus, et les femmes russes décidèrent d'élever à celle, qui avait si bien mérité de leur sexe, un monument dans la ville même où elle avait enseigné.»

Indications bibliographiques.

(M. G. AGNESI) *a)* Enciclopedia Italiana; *b)* The Walking Polyglot, by Sister Thomas a Kempis, Scripta Mathematica, Vol. VI, N° 4, 1939. pp. 211—217.

(S. GERMAIN). La Grande Encyclopédie. p. 847.

(S. KOVALEVSKI) Histoire des Mathématiques par BOYER, Paris, 1900, pp. 226—229.

Les séries spectrales de l'hydrogène et leur interprétation électronique

par

A. GLODEN.

A. - Généralités.

1. — *Les spectres.*

Les renseignements les plus précis sur la constitution des atomes ont été obtenus grâce aux rayonnements qu'ils peuvent émettre. On sait qu'on appelle spectre solaire l'ensemble des rayons colorés provenant de la décomposition de la lumière solaire. Les corps solides et liquides incandescents donnent des spectres continus; il n'en est pas de même des gaz ou des vapeurs incandescents qui donnent lieu à des spectres discontinus formés de raies distinctes. Ces spectres sont caractéristiques des différents gaz ou vapeurs qui les émettent. Nous ne considérerons dans cet article que des spectres d'émission.

Suivant le mode de production des spectres de gaz ou de vapeurs métalliques on distingue les spectres de flamme, les spectres d'arc et les spectres d'étincelle.

Pour obtenir les premiers, on vaporise dans la flamme incolore d'un bec Bunsen un sel du métal. Les spectres d'arc sont obtenus en faisant passer l'arc électrique entre deux charbons dont l'un renferme un sel du métal. Les spectres d'étincelle s'obtiennent par la décharge dans un tube à gaz raréfié.

2. — *Grandeurs caractéristiques d'une radiation monochromatique. Unités.*

Une radiation monochromatique est caractérisée par sa longueur d'onde, sa période ou sa fréquence. Si λ, T et ν désignent resp. ces trois quantités, nous avons les relations

$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$, c étant la vitesse de la radiation. En pratique, on n'utilise pas la période, mais la longueur d'onde, la fréquence et encore le *nombre d'ondes au cm.*

La fréquence $\nu = \frac{c}{\lambda}$.

On désigne le nombre d'ondes au cm par ν_1. On a, de par la définition

$$\nu_1 = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$$

Unités.

λ s'exprime en unités d'ANGSTRÖM.

1 angström = 1 U.A. = 10^{-8} cm.

On représente un millimicron par l'abréviation m μ.

Comme 1 m μ = 10^{-3} μ = 10^{-6} mm = 10^{-7} cm, on a

1 U. A. = 0,1 m μ.

3. — *Domaines des rayonnements visibles, infra-rouges et ultra-violets.*

Le rayonnement visible s'étend de λ_r = 8000 U.A. à λ_v = 4000 U.A. L'ultra-violet s'étend de 4000 U.A. à environ 100 U.A.; l'infra-rouge de 8000 U.A. à environ 4.000.000 U.A. = 0,4 mm.

B. - Les séries spectrales de l'hydrogène.

1. — Série de BALMER.

Si l'on produit le spectre d'étincelle de l'H, on observe déjà dans un spectroscope à faible pouvoir séparateur 4 raies: 1 dans le rouge, 1 dans le vert et 2 dans le violet, les intensités des 4 raies décroissant du rouge au violet. (voir fig. 1). Mais on peut obtenir des raies plus nombreuses comme on le voit sur la figure, les intensités décroissant toujours dans le même sens. Elle donne l'impression que les raies s'approchent, du côté du violet, d'une limite, à tel point qu'à partir d'une certaine longueur d'onde il devient impossible de les séparer à l'échelle du dessin.

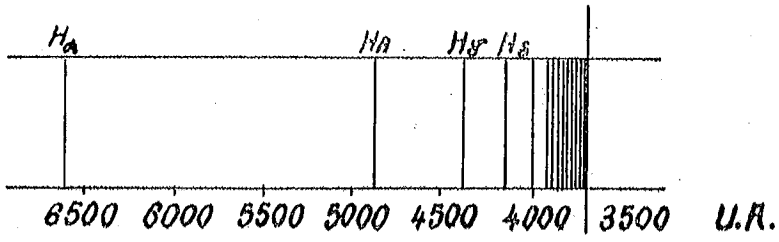


fig. 1. – série de BALMER de l'hydrogène.

Balmer a reconnu en 1885 la loi qui relie entre elles ces raies dont les 4 mentionnées ci-dessus sont désignées par Hα, Hβ, Hγ, Hδ. Il a donné pour les λ de celles-ci les expressions suivantes:

raie	λ
Hα	$6562{,}08 = 3645{,}6 \cdot \frac{9}{5} = 3645{,}6 \cdot \frac{3^2}{3^2 - 2^2}$
Hβ	$4860{,}8 = 3645{,}6 \cdot \frac{4}{3} = 3645{,}6 \cdot \frac{4^2}{4^2 - 2^2}$
Hγ	$4340{,}0 = 3645{,}6 \cdot \frac{25}{21} = 3645{,}5 \cdot \frac{5^2}{5^2 - 2^2}$
Hδ	$4101{,}3 = 3645{,}6 \cdot \frac{9}{8} = 3645{,}6 \cdot \frac{6^2}{6^2 - 2^2}$

Les longueurs d'onde se calculent donc d'après la formule

$$\lambda = 3645{,}6 \frac{m^2}{m^2 - 2^2},$$

m prenant successivement les valeurs entières 3, 4, 5, 6 . . . .

Ce résultat permit de supposer qu'il existait d'autres séries dont la λ est donnée par la formule

$$\lambda = 3645{,}6 \frac{m^2}{m^2 - n^2} \text{ ou } \lambda = \rho \frac{m^2}{m^2 - n^2},$$

ρ étant une constante, n ayant une valeur fixe et m prenant successivement des valeurs entières $> n$.

Nous établirons maintenant la formule correspondante pour ν_1.

$$\nu_1 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\rho}\,\frac{m^2 - n^2}{m^2} = \frac{n^2}{\rho}\left(\frac{m^2 - n^2}{m^2\, n^2}\right) = \frac{n^2}{\rho}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right);$$

$$\nu_1 = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \text{ en posant } \frac{n^2}{\rho} = R.$$

On adopte aujourd'hui pour R, appelée la *constante de RYDBERG,* la valeur 109700 cm^{-1}.

Rydberg a donné à la formule la forme que voici:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = c\,\nu_1 = c\,R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = Ry\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \quad (\alpha)$$

Ry, dite la *fréquence de Rydberg,* ayant pour valeur $3{,}29 \cdot 10^{15}$ sec^{-1}.

2. — *Ensemble des séries spectrales de l'atome d'H.*

On connaît actuellement 5 séries spectrales de l'atome d'H:

Fréquence	Série découverte par	en	Valeurs de m
$\nu = Ry\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{m^2}\right)$	LYMAN	1906	2, 3, 4 . . .
$\nu = Ry\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right)$	BALMER	1885	3, 4, 5 . . .
$\nu = Ry\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2}\right)$	PASCHEN	1908	4, 5, 6 . . .
$\nu = Ry\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{m^2}\right)$	BRACKETT	1922	5, 6, 7 . . .
$\nu = Ry\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{m^2}\right)$	PFUND	1924	6, 7, 8 . . .

La série de Lyman est dans l'ultra-violet, les séries à partir de celles de Paschen sont dans l'infra-rouge.

3. — *Limites des séries.*

Nous commencerons par la limite de la série de Balmer. Pour $m = \infty$, on trouve

$$\nu_1 \infty = \frac{R}{n^2} = \frac{R}{4} = \frac{109\,700}{4} \approx 27\,420 \text{ et}$$

$$\lambda \infty = \frac{1}{27\,420} \text{ cm} = \frac{10^8}{27\,420} \text{ U. A.} \approx 3647 \text{ U. A.}$$

Une expression de la forme $\frac{R}{m^2}$ s'appelle un *terme.*

Comme $\nu_1 = \frac{R}{n^2} - \frac{R}{m^2}$, on a le schéma:

Nombre d'ondes au cm = terme-limite — terme (correspondant à l'entier m).

Si l'on représente $\frac{R}{n^2}$ par T_1 et $\frac{R}{m^2}$ par T, on a

$$\nu_1 = T_1 - T.$$

Pour chacune des 5 séries on obtient un autre terme-limite.

C. — Rappel de deux théories.

1. — *Hypothèse des quanta de PLANCK.*

Avant de donner l'explication électronique des spectres de l'atome d'H, nous devons rappeler l'hypothèse des quanta de Planck. Ce dernier, pour rendre compte des lois du rayonnement, a considéré la matière comme formée d'oscillateurs monochromatiques, chacun d'eux ayant une fréquence ν bien définie. h désignant une constante universelle $= 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ ergs-sec, il appelle *quantum d'énergie* la quantité $\varepsilon = h\nu$. Il fait ensuite l'hypothèse que l'énergie d'un oscillateur ne peut varier que d'une façon discontinue, par quanta $\varepsilon = h\nu$. Cette hypothèse, assez bizarre au premier abord, lui permet d'expliquer les lois du rayonnement.

Cette théorie a été étendue à beaucoup de phénomènes. EINSTEIN l'a appliquée à l'effet photoélectrique.

2. — *Modèle atomique de BOHR.*

D'après Bohr l'atome est constitué

1) d'une partie centrale appelée *noyau;* ce noyau présente une charge positive et a un diamètre excessivement petit, beaucoup plus petit que le diamètre global de l'atome,, et
2) de négatons (= électrons négatifs) gravitant autour du noyau et appelés électrons planétaires.

D. - Cas de l'atome d'H.

1. — *Calcul de l'énergie totale du négaton de l'atome d'H.*

Nous supposerons, pour simplifier, l'orbite circulaire. Si le rayon de l'orbite est donné, on peut calculer la vitesse v du négaton, sa fréquence ν, son énergie cinétique E_c, son énergie potentielle E_p et l'énergie totale $W = E_e + E_p$ d'après les lois ordinaires de la mécanique.

La force d'attraction coulombienne entre le noyau de charge + e et le négaton de charge —e est

$$K = \frac{1}{\varepsilon}\frac{e^2}{r^2} = \frac{a}{r^2}, \text{ en posant } a = \frac{e^2}{\varepsilon},$$

la signification de ε et de r étant évidente. Pour que la force centrifuge fasse équilibre à l'attraction électrostatique, on doit avoir

$$F_{cf} = \frac{M v^2}{r} = \frac{a}{r^2},$$

d'où $$r = \frac{a}{M v^2}.$$

On trouve ensuite

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{mr}}\cdot\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{mr^3}};$$

$$E_c = \frac{M v^2}{2} = \frac{M}{2}\frac{a}{M r} = \frac{a}{2r};$$

$$E_p = -\int_r^\infty K\,dr = -a\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{a}{r}\Big|_r^\infty = -\frac{a}{r}$$

$$W = E_c + E_p = -\frac{a}{2r},$$

ce qui veut dire que la quantité totale d'énergie perdue par le système dans le phénomène considéré est $\frac{a}{2r}$.

Sur une telle orbite E_c ne varie pas (étant fonction de r), E_p ne varie pas ni W. Une telle orbite est dite *stationnaire*. Il n'y aura ni émission ni absorption d'énergie. Ce résultat est en contradiction avec la théorie électromagnétique classique d'après laquelle un électron animé d'un mouvement circulaire doit rayonner de l'énergie. De telles orbites seraient instables, et le négaton dont l'énergie totale diminuerait finirait par tomber sur le noyau.

2. — *Hypothèses de Bohr.*

Pour vaincre la difficulté, Bohr fait deux hypothèses:

1re Hypothèse de Bohr:

Les seules orbites stationnaires possibles sont celles pour lesquelles la condition suivante est remplie:

Quantité de mouvement × Longueur de l'orbite = mh, m étant un entier naturel et h la constante de Planck.

En explicitant cette relation, il vient

$$Mv \cdot 2\pi r = mh,$$

qui, combinée avec $r = \frac{a}{Mv^2}$, donne $v = \frac{2\pi a}{mh}$;

$$r = m^2 \frac{h^2}{4\pi^2 Ma} \quad (1);$$

$$W = -\frac{a}{2r} = -\frac{2\pi^2 Ma^2}{h^2} \cdot \frac{1}{m^2} \quad (2).$$

m est appelé le *nombre quantique*. Interprétons la relation (1):

Les rayons des orbites permises sont proportionnels aux carrés des nombres quantiques correspondants. Voici les résultats du calcul pour quelques valeurs de m:

m	r
1	$r_1 = 0{,}556 \quad 10^{-8}$ cm
2	$r_2 = 2{,}22 \cdot 10^{-8}$
3	$r_3 = 5 \cdot 10^{-8}$
.	.
.	.
.	.
15	$r^{15} = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$

Ces valeurs sont en bon accord avec celles que fournit la théorie cinétique des gaz, d'après laquelle, à 0°, sous la pression normale, la distance moyenne des molécules d'un gaz est de $16 \cdot 10^{-8}$ cm environ.

La relation (2) exprime que *l'énergie du négaton est inversement proportionnelle au carré du nombre quantique caractérisant l'orbite qu'il décrit.*

2me Hypothèse de Bohr. (Condition de fréquence).

Le négaton peut sauter d'une orbite stationnaire à une autre; au moment du passage (qui, notons-le, est contraire aux lois de la méca-

nique classique) il y a émission ou absorption d'un rayonnement monochromatique de fréquence ν. *La valeur de* ν *est telle que le gain ou la perte d'énergie du négaton est un quantum d'énergie* $h\nu$.

En désignant par W_i l'énergie correspondant au nombre quantique i, on trouve

$$W_m - W_n = \frac{2\pi^2 M a^2}{h^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = h\nu,$$

et, en prenant $R_y h = \frac{2\pi^2 M a^2}{h^2}$, donc $R_y = \frac{2\pi^2 M e^4}{e^2 h^3}$, (3)

$$R_y\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \nu.$$

Nous avons déjà trouvé cette formule à la page 131 [formule (α)]. En y faisant $n = 1$, nous obtenons la série de Lyman, $n = 2$, celle de Balmer etc. L'accord entre les valeurs de Ry données par le calcul et l'observation est satisfaisant. Les observations ont donné la valeur $3{,}29 \cdot 10^{15}$ sec^{-1} et l'on obtient, à partir de la formule (3), $3{,}28 \cdot 10^{15}$ sec^{-1}.

3. — *Mécanisme de l'émission spectrale des raies de H.*

A l'état normal le négaton de l'atome d'H gravite sur l'orbite stationnaire de rayon r_1. Un apport d'énergie le fait passer d'une orbite sur une autre à niveau énergétique plus élevé. Sous l'influence d'une décharge p. ex. les négatons des divers atomes sont rejetés sur les orbites de rayons $r_2, r_3, r_4 \ldots$. En retombant sur l'orbite de rayon r_1, ils donnent naissance aux raies spectrales de la série de Lyman. En retombant des orbites r_3, r_4, ... sur r_2, les négatons produisent les raies spectrales de la série de Balmer. En retombant des cercles r_4, r_5 ... sur r_3, ils donnent lieu à la série de Paschen. Le lecteur trouvera lui-même l'explication des séries de Brackett et de Pfund. .(Voir fig. 2)

Autres succès de la théorie de Bohr.

Bohr a réussi à expliquer également la série de PICKERING qu'on rencontre dans le spectre de quelques étoiles. On attribuait d'abord cette série à l'H; Bohr a montré qu'elle était due à l'ion d'He, présentant une charge positive élémentaire.

En remplaçant les orbites circulaires par des ellipses, SOMMERFELD a expliqué l'effet Zeemann et l'effet Stark des raies de l'H. Les perfectionnements successifs de la théorie de Bohr ont permis finalement d'expliquer les séries spectrales de tous les éléments.

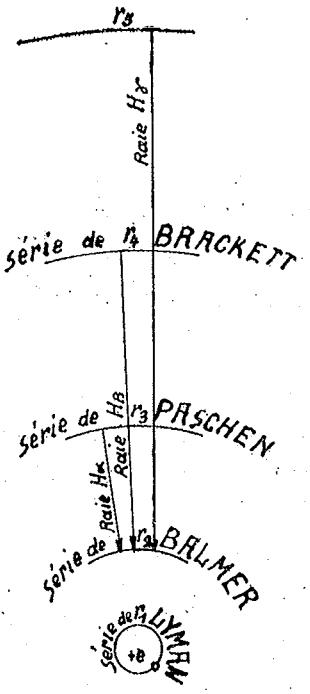

r_5
Raie H_δ
série de r_4 BRACKETT
série de H_β r_3 PASCHEN
Raie H_α
Raie
série de r_2 BALMER
série de r_1 LYMAN

fig. 2.

A propos du bicentenaire de la naissance de Gaspard MONGE :

Sa vie, ses travaux mathémathiques et son influence sur le développement des mathémathiques

par

A. GLODEN.

I^re^ Partie:

La vie de Gaspard MONGE jusqu'à la Révolution Française.

Gaspard MONGE est né à Beaune (Côte d'Or) en 1746. Son père était un coutelier forain qui s'imposait de durs sacrifices pour assurer l'instruction se ses trois fils. G. M. se fit remarquer au collège des Oratoriens de Beaune comme un enfant exceptionnel. Il fit preuve d'un esprit d'invention hors pair en construisant, à quatorze ans, une pompe à incendie et en dressant, à seize ans, un plan de la ville de Beaune qui témoignait d'une profonde originalité. Ses qualités lui valurent d'être nommé, à seize ans, professeur de physique au Collège des Oratoriens de Lyon. Puis il entra à l'Ecole de Mézières où se formaient les officiers du Génie. On l'y nomma répétiteur du cours qu'y professait l'abbé BOSSUT (1730—1814). A vingt-deux ans il y fut nommé professeur de mathématiques en remplacement de ce dernier. Ses grandes qualités de professeur se révélaient déjà à l'Ecole de Mézières. Il y a enseigné jusqu'en 1783. En 1780 il fut nommé professeur d'hydraulique à Paris où il enseignait six mois par an. Elu en 1780 membre de l'Académie des Sciences, il succéda en 1783 à BEZOUT (1730—1783) comme examinateur des élèves de la Marine et il quitta définitivement Mézières.

II^e^ Partie:

Ses travaux mathémathiques.

L'époque de 1768 à 1789, de sa nomination à l'Ecole de Mézières au commencement de la Révolution, est la plus féconde en découvertes dans la vie de M.

Dès 1768 il était en possession de sa méthode qui a donné naissance à la Géométrie descriptive. Dans cette science on enseigne

comment on représente, à l'aide d'une figure plane, un corps à trois dimensions de telle sorte qu'on puisse retrouver d'après cette figure ses dimensions exactes. L'idée de M. s'apparente à la Géométrie analytique, mais au lieu de résoudre les questions par le calcul, M. s'efforce de les résoudre graphiquement. Sa méthode donne par exemple aux architectes les éléments pour la coupe et l'assemblage des pierres. Déjà en 1768 M. avait envisagé de rédiger l'ouvrage qui devait établir sa réputation, mais les autorités le lui interdirent, «car il ne fallait pas aider les étrangers à devenir habiles dans l'art des constructions». Ainsi ses recherches concernant la Géométrie descriptive ne furent divulguées qu'en 1800.[1])

Comme il lui était défendu de publier ses recherches de géométrie descriptive, il continua à s'occuper de la Géométrie Analytique et il publia, à partir de 1771, de nombreux mémoires dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris et de celle de Turin créée par LAGRANGE en 1759. Cette science, créée en 1637 par DESCARTES, n'avait pas encore trouvé son exposition systématique moderne. D'ailleurs, à l'époque de M., on ne connaissait pas le terme de Géométrie analytique employé communément aujourd'hui; on l'appelait «Algèbre appliquée à la géométrie». L'expression de Géométrie analytique est employée pour la 1re fois dans le «Traité de Mathématiques» par S. F. LACROIX (1765—1843).

Descartes n'avait employé que les coordonnées dans le plan. A. CLAIRAUT (1713—1765) introduisit en 1731 les coordonnées dans l'espace. M. a publié en 1785 un ensemble des propriétés fondamentales de la droite et du plan dont il détermina les cosinus directeurs.

Il établit une nouvelle classification des surfaces d'après leur mode de génération: cylindres, cônes, surfaces de révolution .... Cette étude le conduisit à des équations aux dérivées partielles. En 1784 il avait fini d'établir les équations aux dérivées partielles des différentes familles de surface définies par leur mode de génération.

Lagrange a publié en 1776 sa méthode ramenant une équation aux dérivées partielles du premier ordre à un système d'équations différentielles ordinaires. M. qui avait trouvé en 1780 l'équation du plan tangent à une surface rapporte les notions abstraites introduites par Lagrange pour résoudre une équation aux dérivées partielles du 1er ordre à la théorie des surfaces. Il donnait aussi l'interprétation géométrique des équations aux différentielles totales, et il rencontrait, pour la première fois, des transformations de contact.

M. a obtenu dans la théorie des surfaces d'autres résultats importants. Il fut un des premiers à s'occuper des surfaces minima

---

[1]) Monge, Géométrie Descriptive, Paris, an VIIe (1800).

(1784—1787), c'est-à-dire, des surfaces d'aire minimmu passant par un contour donné. [2])

En 1785 il fait connaître les surfaces développables. Il fait la distinction entre les deux courbures des courbes gauches, découvre les développées des courbes gauches ainsi que la surface polaire. Ses travaux sur les équations aux dérivées partielles lui firent découvrir les premières équations fonctionnelles.

Une des découvertes les plus sensationnelles de M. fut celle des lignes de courbure des surfaces et la propriété que les normales à la surface, le long de ces lignes, engendrent une surface développable.

Nous avons déjà dit que vers 1800 parut la première édition de la Géométrie Descriptive. Son cours de géométrie analytique parut en 1805 sous le titre «Applications de l'Algèbre à la Géométrie».

III° Partie:

Sa vie depuis la Révolution Française.

La Révolution marque un changement complet dans la vie de M. Il y voit l'aboutissement des rêves des philosophes et des encyclopédistes du XVIII° siècle, et, plein d'enthousiasme, il se lance dans la tourmente. Il fut un des premiers membres du Club des Jacobins. Après le 10 août 1792 (insurrection entraînant la chute de la royauté) M. devint ministre de la Marine, mais ne le resta que quelques mois. Et quand les armées ennemies avaient envahi le sol de la France, elle fut sauvée grâce à l'action conjuguée de deux hommes: Lazare CARNOT, l'organisateur de la victoire, et M., l'organisateur de la production nationale en vue de l'effort de guerre.

Après la victoire la Convention s'occupa de l'organisation de l'enseignement suivant les idées de Caritat de CONDORCET (1743—1794). En 1793 fut créée l'Ecole Normale Supérieure, et M. qui y fut nommé professeur y enseigna son cours de géométrie descriptive. En 1794 la Convention vota une loi créant l'Ecole Polytechnique de Paris. M. en fut l'organisateur et l'animateur. Ses élèves étaient émerveillés devant les voies nouvelles que leur offraient les Géométries descriptive et analytique.

L'activité de M. ne se borna pas à l'Ecole Polytechnique. En 1796 le Directoire l'envoya en Italie pour recevoir les objets d'art cédés à la France. Il était à la tête de l'expédition scientifique que Bonaparte emmenait en Egypte et il devint le président de l'«Institut Egyptien des Sciences et des Arts». Il prit part également à l'expédition de Syrie. Après son retour à Paris il reprit ses fonctions de

[2]) Cf. le résumé historique sur les surfaces minima, DARBOUX, Leçons générales sur la théorie des surfaces, I^re^ Partie, Paris, 1914, pp. 319—331.

professeur à l'Ecole Polytechnique. En 1799 il fut nommé sénateur et il fut aussi président du Sénat. La nouvelle du désastre de Russie provoqua chez lui une attaque d'apoplexie. Durant les «Cent jours» nul ne fut plus fidèle auprès de Napoléon trahi par la fortune que M. Après la chute de l'Empire il se réfugia quelque temps chez F. ARAGO (1786—1853). Quand en 1816 le gouvernement de la Restauration reconstitua l'Institut de France qu'il venait de dissoudre, M. fut rayé de la liste des membres en même temps que L. CARNOT. Il ne supporta pas cette épreuve, tombant depuis lors dans un état de prostration permanente. Il mourut deux ans plus tard, en 1818.

IV° Partie:

L'influence de Monge sur le développement de la géométrie.

Avec Monge s'éteignit un génie créateur dont les découvertes ont porté des fruits durant tout le XIX° siècle en renouvelant la géométrie. Son influence fut énorme. Comme il est impossible de citer tous ses disciples directs et leurs découvertes, nous nous bornons à indiquer quelques faits caractéristiques.

Lazare Carnot (1753—1823 a donné, dans sa «Géométrie de Position», des éléments fondamentaux de la géométrie nouvelle. La propriété de dualité de la géométrie projective de PONCELET (1788—1867) a ses origines dans la théorie des polaires, esquissée par M. Le fondateur des «Annales de Mathématiques pures et appliquées», J.-D. GERGONNE (1771—1859), fut un des pionniers de la géométrie projective. M. CHASLES (1793—1880) établit la nouvelle discipline sur une base solide, et il introduisit en même temps l'esprit historique dans les recherches mathématiques par son «Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie». Ch. DUPIN (1784—1873) continue les travaux de M. sur les lignes de courbure. G. LAME (1795—1870) a donné les notations symboliques des équations ainsi que l'équation des faisceaux et a introduit les coordonnées elliptiques. Th. OLLIVIER (1793—1853) a étudié, après M., les génératrices rectilignes des quadriques et en a déduit la construction de modèles géométriques déformables. J. HACHETTE (1769—1834) a perfectionné beaucoup de points de détail de la géométrie descriptive et a donné, en 1805, avec M, l'exposé systématique de la géométrie analytique. A. CAUCHY (1789—1857), le plus grand analyste de la première moitié du XIX° siècle, subit également l'influence de M.; il a commencé ses recherches par des travaux de géométrie. LANCRET (1774—1807) définit la torsion des courbes gauches. J. BINET (1786—1856) s'occupa de la génération des quadriques. LIVET définit en 1804 les quadriques polaires réciproques. Le géomètre belge DANDELIN (1794—1847) découvrit les propriétés

du point de contact d'une sphère inscrite dans un cône avec un de ses plans tangents.

Nous arrêtons ici cette liste, incomplète, des continuateurs de M. et nous terminons par la phrase suivante écrite par F. Arago: «Nos derniers neveux ne nous démentiront point; comme nous, ils placeront l'auteur de la Géométrie descriptive sur le premier rang, parmi les plus beaux génies dont la France puisse se glorifier».

Ouvrages et articles consultés:

Histoire des Mathématiques, par Jacques BOYER, Paris, 1900.

C. DUPIN, Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge.

Mathématiciens révolutionnaires, par P. SERGESCU. Sphinx, 9e année, Nos 10—11—12, 1939, pp. 145—151.

La vie et l'œuvre de Gaspard Monge, par P. SERGESCU, Recteur de l'Ecole Polytechnique de Bucarest (Extrait du N° 54 de la revue «Sciences»), Paris. 1947, pp. 288—310.

(D'autres indications bibliographiques se trouvent à la suite de ce dernier article).