APERÇU HISTORIQUE DES MULTIGRADES

AVEC UN INDEX ALPHABÉTIQUE DES NOMS QUI Y SONT CITÉS

PAR A. GLODEN

Rappel de la définition des systèmes multigrades et exemples numériques.

On appelle système multigrade un système diophantien de la forme

$$A_1^k + A_2^k + \ldots + A_p^k = B_1^k + B_2^k + \ldots + B_q^k$$
$$(k = n_1, n_2, \ldots n_r),$$

l'exposant k prenant successivement les valeurs entières et potives $n_1, \ldots n_2, n_r$.

Exemples:

$1^k + 1^k + 4^k = 3^k + 3^k$, $(k = 1, 2)$ I

$1^k + 5^k + 5^k = 2^k + 3^k + 6^k$, $(k = 1, 3)$ II

$1^k + 9^k + 10^k = 5^k + 6^k + 11^k$, $(k = 2, 4)$ III

$3^k + 4^k + 7^k = 1^k + 1^k + 6^k + 6^k$, $(k = 1, 2, 3)$ IV

Si l'exposant k prend successivement les valeurs des k premiers entiers, le système est dit d'ordre k. (I) est un exemple d'un système bigrade, (IV) d'un système trigade. Bien qu'elle ne soit pas correcte, l'expression d'équation multigrade au lieu de système multigrade a été consacrée par l'usage.

Le problème des multigrades est désigné dans la littérature mathématique française sous le nom de problème de Tarry, dans la littérature anglo-saxonne on l'appelle «the Tarry-Escott

Communication faite à la 17e section (histoire des sciences) de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, Congrès de Clermont-Ferrand, 1949, le 18/7.

Problem». Pour ne pas alourdir mon exposé, je me bornerai aux faits essentiels.

La première solution d'un système bigrade à quatre termes par membre a été donnée par GOLDBACH en 1750; elle renferme quatre paramètres arbitraires. EULER a donné une solution paramétrique d'un système bigrade un an plus tard.

Après 1800, plusieurs auteurs dont DELAMBRE, BORDA et LACROIX s'occupèrent de la recherche de couples de polynômes de même degré admettant pour zéros des suites d'entiers distinctes et dont la différence est constante, problème équivalent au problème de Tarry. De tels polynômes permettent également de calculer les logarithmes de certains nombres avec une grande approximation. Le résultat le plus important comme étant le plus général a été donné par KNIGHT en 1817; celui-ci indique un procédé pour construire de tels polynômes qui est, en principe, identique à celui qu'Escott a énoncé en 1910. Pour la plupart des auteurs s'occupant de la question peu après 1800 elle semble avoir présenté de l'intérêt surtout en vue de son application au calcul des logarithmes. L'importance du résultat obtenu par Knight n'avait guère été remarquée.

La question fut même abandonnée totalement pendant quelques dizaines d'années. A partir de 1851 plusieurs mathématiciens donnent des exemples numériques et des solutions paramétriques de bigrades, puis les auteurs s'évertuent à obtenir des multigrades d'un ordre plus élevé. Après la considération des multigrades vraies pour les n premières valeurs entières de l'exposant, les multigrades vraies pour les premières valeurs paires ou pour les premières valeurs impaires de l'exposant sont également étudiées. Sous ce rapport il convient de mentionner la solution élégante du système

$$A_1^k + A_2^k + A_3^k + A_4^k = B_1^k + B_2^k + B_3^k + B_4^k, \quad (k = 2, 4, 6)$$

donnée par ROUX sous le pseudonyme de CRUSSOL.

L'ère des théorèmes généraux sur les systèmes multigrades commence en 1888. En cette année FROLOV énonce dans le Bulletin de la Société Mathématique de France le théorème nommé d'après lui. Il s'écoule pourtant près d'un quart de siècle avant que Gaston TARRY n'énonce son théorème fondamental

permettant de construire une multigrade d'ordre n+I à partir d'une multigrade d'ordre n, donc de multigrades de tous ordres. Il est à remarquer que ce théorème simple a été énoncé deux ans après un théorème sur les équations algébriques dû à ESCOTT et dont il est une conséquence immédiate. On connaît actuellement plusieurs théorèmes permettant de passer d'un système multigrade donné à un système d'ordre supérieur, c.-à-d., qui subsiste pour toutes les valeurs de l'exposant du système de départ et en outre pour d'autres valeurs de l'exposant. J'ai donné p. ex. en 1946 un théorème permettant d'obtenir à partir d'un système multigrade d'ordre n, un système d'ordre n+3 avec seulement deux fois plus de termes que dans le système initial. J'avais démontré antérieurement (en 1939) un théorème d'abaissement qui donne, en partant d'un système multigrade d'ordre n, un système d'ordre n-I, et des théorèmes analogues.

Le théorème de BASTIEN publié en 1913 revêt une importance particulière. Il a mis en évidence l'intérêt des systèmes multigrades d'ordre n, présentant le nombre minimum de termes par membre; ce minimum est n+I, en supposant que le nombre de termes soit le même dans les deux membres. J'ai appelé de tels systèmes des systèmes multigrades normaux, les auteurs anglo-saxons les désignent sous le nom de «Ideal Multi-Degreed Equalities». Si l'on n'impose aucune restriction au nombre de termes d'un système multigrade, la construction d'un tel système est aisée d'après le théorème de Tarry quel qu'en soit l'ordre. Il existe dans la littérature mathématique des systèmes du 25e ordre, et il n'est pas plus difficile, en principe, de construire des systèmes multigrades du 100e ordre par ex. Mais si l'on veut réduire pour chaque ordre, le nombre de termes au minimum établi par le théorème de Bastien, on se heurte à des difficultés qui vont en croissant avec l'ordre du système multigrade envisagé.

Voici l'état actuel de la question des systèmes multigrades normaux. On a établi la solution complète des systèmes bigrade et trigrade par plusieurs méthodes. Des solutions paramétriques, c.-à-d., où les inconnues sont exprimées à l'aide de paramètres

sans qu'il soit prouvé que les groupes de formules connus donnent toutes les solutions numériques, ont été établies pour les systèmes multigrades d'ordre 4 à 7. LETAC a donné deux exemples numériques d'un système octigrade normal d'ordre 8, et ce sont les seuls qu'on connaisse. C'est encore Letac qui a indiqué la méthode pour obtenir une infinité de solutions de systèmes multigrades d'ordre 9. Il est a remarquer que le problème s'avère ici moins rébarbatif pour l'ordre 9 que pour l'ordre 8. On ne connaît aucune solution numérique de systèmes multigrades normaux d'ordre supérieur à 9, et on n'a même pas démontré qu'il en existe. Peut-être découvrira-t-on un théorème analogue au théorème de Tarry mais s'appliquant aux systèmes multigrades normaux.

J'ai réuni dans un ouvrage publié en 1938 les résultats principaux acquis sur les systèmes multigrades à cette époque. Leur importance pour la Théorie des Nombres n'a été reconnue que bien tard, à l'heure actuelle pourtant la théorie des multigrades est assez étendue et tellement bien établie que les traités modernes d'Analyse Diophantienne leur consacrent quelques paragraphes sinon un chapitre entier. L'ouvrage «Introduction to the Theory of Numbers» par HARDY et WRIGHT, publié en 1938, leur consacre 3 pages. Je désigne la théorie des systèmes multigrades sous le nom d'«Analyse Diophantienne Multigrades». Des résultats nombreux ont été obtenus depuis 1938 notamment par MM. GOORMAGHTIGH, GERARDIN, LETAC, BIRCK, MOESSNER, MAHRENHOLZ, DORWART, WRIGHT, PALAMA et l'auteur de cet Aperçu.

Comme l'a dit un des grand arithméticiens de notre siècle, - j'ai nommé M. Maurice Kraitchik, - les systèmes multigrades constituent une mine quasi inépuisable de recherches. Outre leur valeur intrinsèque dans la Théorie des Nombres, qui fait qu'elles méritent de retenir l'attention des mathématiciens, leur importance est accrue en raison de leurs relations avec d'autres disciplines mathématiques. On peut transposer le problème des multigrades sur le plan de l'Algèbre. Par ex., la recherche des systèmes multigrades d'ordre n, avec p termes par membre, est équivalente à la construction de deux équations algébriques de

degré p, ayant des systèmes distincts de racines entières; de telles équations présentent (n+I) coefficients égaux en comptant les coefficients à partir de celui du terme de degré le plus élevé qu'on suppose égal à l'unité.

Les systèmes multigrades ont été appliqués utilement au calcul des logarithmes de certains nombres avec une très grande approximation, bien supérieure à celle des tables ordinaires. On obtient en effet, à l'aide de la formule classique donnant le développement de $\log \frac{m}{n}$ des séries très convergentes. On a ainsi calculé les logarithmes de certains nombres avec quelques dizaines de décimales. ESCOTT a ulilisé des systèmes multigrades pour établir des relations où figure des fonctions arc tgu et on en déduit une relation donnant $\frac{\pi}{4}$. En 1930 Joseph GRANT a appliqué les svstèmes multigrades aux équations fonctionnelles. DORWART a construit à l'aide de systèmes multigrades en s'appuyant sur des travaux de Polya et de Bauer, des polynômes réductibles, et j'ai donné des exemples pour des degrés plus élevés que ceux considérés par Dorwart. J'ai construit également à l'aide de systèmes multigrades des polynômes réductibles où entrent des nombres premiers jumeaux, et la question des systèmes multigrades normaux me semble susceptible de fournir dans des conditions qui doivent encore être précisées, des éclaircissements nouveaux sur le problème de l'existence d'une infinité de nombres premiers jumeaux.

Je me bornerai à effleurer ici les rapports nombreux des systèmes multigrades avec la géométrie; à titre d'exemple je signale l'équivalence de la recherche des quadrilatères inscrits à côtés et diagonales en entiers avec la résolution du système trigade normal.

Les multigrades constituent un exemple frappant d'une théorie dont les arithméticiens ont méconnu longtemps l'importance, laissant le travail de pionniers souvent à des amateurs enthousiastes. Il faut considérer comme une circonstance heureuse l'existence de revues mathématiques telles que Sphinx-Oedipe et l'«Intermédiaire des Mathématiciens», sans lesquelles

les solutions très élégantes et des résultats généraux concernant l'Analyse Diophantienne Multigrade auraient peut-être été perdus pour la science. L'Analyse Diophantienne Multigrade nous montre encore l'union intime des divers domaines de la mathématique, et en manière de conclusion je dirai qu'elle est systématisée davantage que l'Analyse Diophantienne ordinaire, et, ce qui assez remarquable, grâce à des méthodes plus élémentaires.

Index alphabétique des noms propres cités dans cet Aperçu.

Bastien L.
Birck Otto
Borda J. C. (1733-1799)
Delambre Jean-Baptiste (1749-1822)
Dorwart H. L. (1902-)
Escott E. B. (-1946)
Euler Léonard (1707-1783)
Frolov
Gérardin André
Gloden Albert (1901-)
Goldbach
Goldbach Christian G. (1690-1764)
Goormaghtigh René (1893-)
Grant Joseph
Hardy C. H. (1877-1947)
Knight J.
Lacroix S. F. (1765-1843)
Letac Ad. Gontran (-1945)
Mahrenholz Johannes
Moessner Alfred (1893-)
Palamà Guiseppe (1898-)
Rignaux Marcel pseudonyme Germain Clarux
Roux pseudonyme Crussol
Wright E. A. Maitland (1609-)
Tarry Gaston (1843-1913)