

Über die Masse des Planetoidenringes.

Von A. V. BRUNN in Danzig.

Mit vier Tafeln und einer Abbildung im Text.

Inhalt:

- I. Einleitung.
 - Allgemeines über die Art und Größe der Störungen der Planetoiden aufeinander.
 - Methoden zur Bestimmung der Gesamtmasse der Planetoiden.
- II. Folgerungen aus der Phänomenologie des Planetoidenringes.
 - Betrachtung über die Empfindung von Flächenhelligkeiten.
 - Bedingungen, denen die Masse und Massenverteilung genügen soll;
 - Annahme der HARZERSchen Gesamtmasse.
 - Die phänomenologischen Erfahrungen sind mit einer so großen Gesamtmasse nicht in Einklang zu bringen.
- III. Die mechanische Theorie der Störungen eines Planetoiden durch den Planetoidenring.
 - Allgemeines über die Natur des Problems.
 - Die bisherigen Untersuchungen.
 - Die Formulierung der Aufgabe.
 - Untersuchung über die empirisch gegebenen Häufigkeitsfunktionen.
 - Die Differentialgleichungen für die Störungen und ihre Integration.
 - Die numerische Durchführung der Integration.
- IV. Die Vergleichung mit den Beobachtungen und numerische Resultate.
 - Die Störungen des geozentrischen Ortes.
 - Nichtberücksichtigung der Bahnlagenelemente.
 - Grundsätze für die Auswahl des Beobachtungsmaterials.
 - Durchmusterung desselben nach diesen Gesichtspunkten.
 - Numerische Schlüsse aus LEVEAUS Vesta-Theorie.
 - „ „ „ SAMTERS Egeria-Neubearbeitung.
 - Resultat.

I.

Da man auf Grund plausibler Annahmen über die Albedo und die Dichte der kleinen Planeten selbst für die größten dieser Körper Massen erhält, die jedenfalls erheblich unter 0.01 der Marsmasse bleiben, so sind direkte Bestimmungen solcher einzelnen Massen aus ihrer mechanischen Wirkung bisher überhaupt noch nicht versucht worden. Und in der Tat kann es wohl als gänzlich aussichtslos gelten, etwa auf Grund einer Theorie der allgemeinen Störungen eine solche Bestimmung zu versuchen. Denn selbst Vesta oder Ceres könnten in der Bewegung nicht ganz unmittelbar benachbarter Planetoiden — nur für solche ließe sich ja eine allgemeine Störungstheorie ausarbeiten — an merklichen Störungen höchstens solche sehr langer Perioden hervorbringen; diese aber würden in die Elementenbestimmung eingehen und erst dann zu isolieren sein, wenn man über Beobachtungsreihen verfügt, die einen genügend langen Zeitraum überdecken. Mehr Aussicht auf Erfolg würde ein gelegentlicher sehr naher Vorübergang irgend eines kleinen Planeten an einem der größten Körper der Gruppe, Vesta, Ceres oder Pallas, bieten. Allerdings läßt sich nicht sagen, welches die überhaupt größten möglichen Annäherungen sind, die im System der kleinen Planeten vorkommen können, da man natürlich nicht für die 210925 Kombinationen der 650 jetzt bekannten Körper die größten Annäherungen berechnen kann. Indes liefert die einzige systematische Untersuchung, die bisher über diesen Punkt angestellt ist, doch einen Überblick über die vorkommenden Größenordnungen. Es ist dies die Dissertation von Herrn GALLE¹⁾; in derselben wendet der Verfasser die von ihm aufgestellten Formeln zur Berechnung der größten Annäherungen auf Juno einerseits und die übrigen 199 bis dahin bekannten Planetoiden andererseits an mit dem Resultat, daß die größte „Proximität“, die zwischen Juno und Ausonia, 0.003 astronomische Einheiten beträgt. Eine vereinzelte derartige Annäherung genügt aber bei weitem nicht, um merkbare Störungen hervorzubringen. Man überzeugt sich davon leicht durch folgende Überlegung: Man betrachte das Dreikörperproblem Sonne, großer Planetoid (z. B. Vesta), kleiner Planetoid als problème restreint mit den Massen 1, μ , σ und dem Bahnradius a . Bezeichnet man als Wirkungssphäre den größtmöglichen um den großen Planetoiden noch geschlossenen Zweig der HILLSchen Grenzkurve, so wird dieselbe sehr nahe durch einen Kreis vom Radius

$$\omega = 3^{-1/3} a \mu^{1/3} \quad ^2)$$

1) A. GALLE, Zur Berechnung der Proximitäten von Asteroidenbahnen. Dissertation, Breslau 1883.

2) CHARLIER, Mechanik des Himmels II, pag. 110.

dargestellt. Führt man hier die später näher zu begründende photometrisch bestimmte Masse unter Annahme gleicher Dichte für alle Planetoiden ein, so läßt sich die letztere Größe auch schreiben

$$\omega = 0.00065 a \cdot q,$$

wo a in astronomischen Einheiten, der Planetoidenradius q in Teilen des Vesta-radius ausgedrückt ist. Der innere Durchschnittspunkt dieses Kreises mit der Verbindungslinie Sonne — großer Planetoid ist der herkömmlicherweise mit L_1 bezeichnete Librationspunkt. Da nun jede durch diesen hindurchgehende Bahnkurve im rotierenden Coodinatensystem die Krümmung 0 hat, also mit großer Annäherung längs einer endlichen Strecke als gerade Linie betrachtet werden kann, so ist es leicht, für spezielle Annahmen die Störungen abzuschätzen. Um die GALLESchen Ergebnisse benutzen zu können, wählen wir als konkretes Beispiel das System Sonne — Juno — kleiner Planetoid. Hier ist:

$$\omega = 0.00023 a$$

$$a = 2.67$$

$$n = 814''$$

Der kleine Planetoid habe als ungestörte Bahn einen Kreis mit dem Radius

$$a' = 0.99977 a$$

$$\text{also } n' = 1\,00034 n,$$

gehe demgemäß durch L_1 hindurch! Wir wollen nun den linearen Betrag der Störungen abschätzen, die der kleine Planetoid auf dem 2ω langen zu gleichen

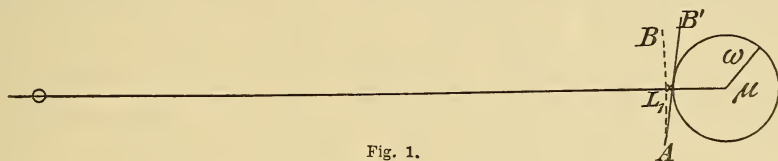


Fig. 1.

Teilen zu beiden Seiten des Librationspunktes liegenden Stück seiner relativen Bahn erleidet; der numerische Betrag dieser Störung ist natürlich im ruhenden und rotierenden Raum gleich. Die genäherten Beziehungen zwischen dem gestörten und dem ungestörten Ort liest man bequem aus der beistehenden kleinen Skizze (Fig. 1) ab, die die Verhältnisse im rotierenden System veranschaulicht.

Angenommen, der kleine Planetoid sei mit der der ungestörten Bewegung entsprechenden Richtung und Geschwindigkeit in A angelangt, dann würde er ohne die Juno-Störungen auf dem Kreisbogen nach B weiterlaufen. Unter der Wirkung der Störungen dagegen wird er sehr nahe das geradlinige Bahnstück A B' beschreiben, und zwar in der Zeit $\frac{2\omega}{a(n'-n)} = 340^d$. Die Entfernung B B', also der lineare Betrag der Störungen, welche der kleine Planetoid während seines 340 Tage dauernden Vorüberganges an Juno erlitten hat, findet sich zu rund $10^{-7} \times a = 40$ km. Das entspräche in der Oppositionsentfernung einer maximalen Änderung des geozentrischen Ortes um 0.''05. Dabei muß

hervorgehoben werden, daß das hier gerechnete Beispiel insofern einen extremen Fall darstellt, als die Exzentrizitäten und gegenseitige Bahnneigung gleich 0 angenommen sind; eine geringe Abweichung dieser Elemente von 0 würde aber schon genügen, den kleinen Planetoiden die Wirkungssphäre der Juno viel schneller passieren zu lassen und die Störungen dementsprechend zu verringern. Natürlich sind diese Überlegungen lediglich Approximationen; sie reichen aber hin, um darzutun, daß selbst bei den größten Planetoiden eine Annäherung bis auf etwa 0.0001 astronomische Einheiten notwendig ist, wenn bei einem einmaligen Vorübergange eine merkliche Änderung der Elemente erfolgen soll. Bei wiederholten Vorübergängen würde sich natürlich die Wirkung summieren, doch ist die Periode hoher Proximitäten im allgemeinen eine sehr lange. Ob die augenblickliche Lage der Bahnen der kleinen Planeten überhaupt derartige Annäherungen gestattet, kann nicht entschieden werden; sicher scheint es aber, daß die Störungen der großen Planeten im Laufe der Zeit gelegentlich solche Möglichkeiten herbeiführen müssen, und es würde dann natürlich von höchstem Interesse sein, ein solches Phänomen beobachtend zu verfolgen; indes sind wir für solche direkte Massenbestimmung eben gewissermaßen auf einen glücklichen Zufall angewiesen. Keinesfalls zulässig aber erscheint es nach den vorangegangenen numerischen Abschätzungen, die oft recht unbefriedigende Übereinstimmung anscheinend guter nahe benachbarter Normalörter untereinander und mit den definitiven Ephemeriden auf „zufällige“ Planetoidenstörungen zu schieben. Wenn z. B. NEWCOMB bei seiner Bahnbestimmung der Polyhymnia¹⁾ für zwei nur 10 Tage auseinanderliegende vollwichtige Normalörter eine Abweichung von 5'' findet, so müßte sich Polyhymnia während dieser Zeit einem der größten Planetoiden auf weniger als eine Bogenminute genähert haben, was nicht der Fall gewesen ist. Als ausreichenden Grund für derartige Abweichungen wird man eben die große Inhomogenität des von vielen Beobachtern mit den verschiedenartigsten Instrumenten zusammengebrachten Beobachtungsmaterials anzusehen haben. Es mag dabei besonders darauf hingewiesen werden, daß die helleren Planetoiden auch vorwiegend an schwachen Instrumenten beobachtet werden. Man kann daher ziemlich allgemein sagen, daß die meisten dieser Beobachtungen in der Nähe der Leistungsgrenze der betreffenden Instrumente angestellt werden, wo die Auffassungsunterschiede oft sehr beträchtliche Werte annehmen.

Nach dem Vorangegangenen bleibt für die Massenbestimmung einzelner Planetoidenindividuen vorläufig nur der indirekte Weg über die Photometrie übrig²⁾, wodurch natürlich wegen des hypothetischen Charakters der photometrischen Voraussetzungen auch nur approximative Werte erhalten werden können. Die photometrische Massenbestimmung beruht auf folgendem: Kennt

¹⁾ Astrominical Papers of the American Ephemeris. Vol. V, 5.

²⁾ Herrn BARNARDS vereinzelte direkte Durchmessermessungen, Monthly Notices Bd. LVI Nr. 2, können uns hier kaum von Nutzen sein und dürften wohl auch bei der Schwierigkeit der Messung kleiner Durchmesser keine große Sicherheit besitzen.

man für irgendeinen Planeten bekannter Entfernung, Albedo und Größenklasse den Durchmesser, so kann man diesen auch für jeden anderen Planeten, für den die drei ersten Bestimmungsstücke bekannt sind, berechnen; kennt man außerdem auch die Dichte, so ist damit die Masse bekannt. Nimmt man nun nach Herrn MÜLLER¹⁾ für Mars die Albedo zu 0.29, die mittlere Oppositionshelligkeit zu -1.79 , den Halbmesser in der Einheit der Entfernung zu $4.''68$, ferner für die Albedo der kleinen Planeten das Mittel zwischen der von Mars und Merkur, 0.24, so ergibt sich für den Halbmesser ϱ eines kleinen Planeten²⁾:

$$\log \varrho = 3.3135 + \log [a (a - 1)] - \frac{1}{5} m_0;$$

hier ist a die mittlere Entfernung, m_0 die mittlere Oppositionsgrößenklasse des betreffenden kleinen Planeten. Nimmt man nun noch für die Dichtigkeit den mittleren Wert der Erde, was wohl als obere noch plausible Grenze gelten darf, da die Erde die größte bekannte Dichte unter den Gliedern des Sonnensystems hat, so erhält man für den größten Planetoiden Vesta $\frac{1}{12} \times 10^{-8}$ der Sonnenmasse.

Für die Störungen, welche die Planetoiden sowohl auf die großen Planeten, als auch vor allem aufeinander ausüben, kommt es nun aber, von den obenerwähnten seltenen Fällen der „Proximitäten“ abgesehen, nicht sowohl auf die Kenntnis einzelner Massenwerte, als auf die Gesamtmasse und ihre Verteilung auf die verschiedenen Entfernungen von der Sonne an; und hier führt nun die photometrisch-statistische Methode sofort zu den größten Unsicherheiten. Zwar bezüglich der relativen Häufigkeiten der Planetoiden verschiedener mittlerer Entfernung dürfte unsere bisherige Kenntnis das Typische der Erscheinung auch quantitativ schon recht gut liefern, aber die Gesamtmasse bleibt, da die Gesamtzahl unbekannt ist, durchaus unsicher.

Herr BAUSCHINGER³⁾ taxiert dieselbe zu $\frac{1}{3} 10^{-8}$ der Sonnenmasse; und wenn man bedenkt, daß bereits die drei größten Planetoiden mehr als die Hälfte dieser Masse decken, so wird diese Schätzung durchaus plausibel erscheinen. Indes wohnt natürlich diesem Resultat, eben weil es schließlich auf bloßem Gutdünken beruht, keine Beweiskraft gegenüber etwaigen aus der Mechanik geschöpften Gegenargumenten inne. Denn es scheint ja zunächst nichts zu hindern, sehr kleine, noch unentdeckte Planetoiden in jeweils genügender Menge vorauszusetzen. Diese Möglichkeit ist jedoch, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden, auch keineswegs beliebig, sondern wird durch die Resultate unserer Beobachtungen nach oben hin durch eine ziemlich enge

1) G. MÜLLER, Die Photometrie der Gestirne, pag. 370.

2) Vgl. J. BAUSCHINGER, Tabellen zur Geschichte und Statistik der kleinen Planeten, Veröffentlichungen des Königl. Astron. Recheninstituts zu Berlin Nr. 16.

3) Tabellen zur Geschichte usw., S. 14.

Grenze abgeschlossen. Daß eine solche Grenze existiert, scheint bei den Versuchen, die Gesamtmasse des Planetoidenringes rein aus ihren mechanischen Wirkungen zu bestimmen, nicht genügend beachtet zu sein. Einen Versuch dieser Art hat zuerst Herr HARZER in seiner großen Arbeit über die Säkularstörungen der großen Planeten¹⁾ unternommen, indem er für die Diskordanz zwischen Theorie und Beobachtung in der Säkularbewegung des Marsperihels eben die Masse des Planetoidenringes verantwortlich machte. Unter der vereinfachenden Voraussetzung, daß diese Masse in einem Kreisring um die Sonne mit dem Radius 2.7 konzentriert sei, lassen sich die in der Marsbewegung hervorgebrachten Störungen leicht berechnen und umgekehrt aus den bekannt angenommenen Störungsbeträgen die Planetoidenmasse bestimmen. Herr HARZER findet sie rund zu $\frac{1}{2} 10^{-6}$ der Sonnen-, also etwa dem 1.5fachen der Mars-

masse. Etwa gleichzeitig erschienen die Resultate von NEWCOMBS grundlegender Neubearbeitung der Theorie der großen Planeten²⁾; das Resultat stimmte im wesentlichen mit dem von Herrn HARZER überein. Die Diskussion des gesamten vorhandenen Beobachtungsmaterials ergab, daß ein Betrag von 5.''5 in der jahrhundertlichen Perihelbewegung des Mars durch die Theorie nicht aufgebracht werden konnte. Diese Zahl hat Herr RAVENÉ³⁾ benutzt, um einen neuen Massenwert für den Planetoidenring abzuleiten; er repräsentiert dabei diese Masse durch einen fiktiven „mittleren“ Planeten endlicher Exzentrizität und Neigung: eine gegenüber der einfachen HARZERSchen Annahme wenig glückliche Komplikation. Bei der Berechnung sind außerdem, wie Herr HARZER⁴⁾ sogleich nachwies, Fehler untergelaufen, die das Resultat sogar der Größenordnung nach entstellen, wovon man sich durch einen Überschlag leicht Rechenschaft geben kann; bei richtiger Rechnung hätte sich sogar etwa die 3fache Marsmasse ergeben. Der gewaltige Unterschied dieser Resultate gegen das, was die Statistik ergibt, ist heute ziemlich bedeutungslos geworden, nachdem Herr VON SEELIGER gezeigt hat⁵⁾, daß sich die sämtlichen für die vier inneren Planeten nachgewiesenen Bewegungsanomalien durch eine einfache und plausible Annahme über die Größe und Verteilung der Massen, welche ihre Existenz durch das Phänomen des Zodiakallichtes kundgeben, einheitlich erklären lassen. Immerhin muß man doch einmal die Frage zur Entscheidung zu bringen suchen, ob man sich für die Gesamtmasse der Planetoiden mit den statistisch-photometrischen Abschätzungen begnügen darf, oder ob man

1) P. HARZER, Die säkularen Veränderungen der Bahnen der großen Planeten; Preisschrift der Fürstlich JABLONOWSKISchen Gesellschaft, Leipzig 1895.

2) S. NEWCOMB, The Elements of the four inner Planets and the fundamental constants of Astronomy. Washington 1895.

3) Astr. Nachr. 3359.

4) Astr. Nachr. 3362.

5) Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 41. Jahrgang, pag. 234, und Sitzungsberichte der Kgl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften. Jahrgang 1906, pag. 595.

für diese Größe in der Tat die Ordnung der Marsmasse anzunehmen hat; die mechanischen Wirkungen einer solchen dürften wir dann allerdings weder in der Theorie der großen, geschweige denn der kleinen Planeten vernachlässigen. Diese Frage kann, wenn überhaupt, nur eine genaue Untersuchung der Bewegung der kleinen Planeten selbst entscheiden, und zwar vor allem eine solche auf systematische Abweichungen, welche auf Säkularstörungen durch den Planetoidenring zurückzuführen sind. Die periodischen Störungen bleiben, wie wir sehen werden, jedenfalls zu gering, um nachgewiesen zu werden, und werden sich überdies häufig mit den Abweichungen, die wir oben als „zufällige“ Störungen bezeichnet haben, überdecken. Der Gang der Untersuchung wird also der sein: Es ist zunächst die Vorfrage zu entscheiden, ob eine Masse gleich der des Mars überhaupt in dem zur Verfügung stehenden Raume so verteilt werden kann, daß kein Widerspruch gegen unsere Erfahrung entsteht. Nachdem dieses zuungunsten einer so großen Masse entschieden ist, folgt die Theorie der Störungen des Planetoidenringes auf ein einzelnes ihm angehörendes Individuum. Auf Grund dieser Theorie folgt dann durch Vergleich mit den Beobachtungen, daß formell sich sogar eine negative, in Praxis also jedenfalls keine nachweisbare Masse für den Planetoidenring ergibt. Für zuverlässige Zahlenangaben fehlen bisher genügende Grundlagen.

II.

Dem Plane der Einleitung gemäß wollen wir also, bevor wir uns der eigentlichen mechanischen Untersuchung zuwenden, uns mit der rein phänomenologischen Frage auseinandersetzen, ob es überhaupt möglich ist, eine Gesamtmasse des Planetoidenringes gleich der des Mars so zu verteilen, daß sie sich bisher unserer Beobachtung hat entziehen können. Das ist in der Tat eine sehr dringliche Frage; denn es darf jedenfalls als feststehend gelten, daß die bisher bekannten Planetoiden unter Zugrundelegung der obigen recht extremen Annahme über Dichtigkeit und Albedo noch nicht das 4fache der Vestamasse ausmachen¹⁾. Es bleibt also noch rund der 100fache Betrag dieser Gesamtmasse der bekannten Körper so zu verteilen, daß er uns bisher hat verborgen bleiben können. Es ist demnach unsere Aufgabe, zu untersuchen, ob es ein Verteilungsgesetz gibt, welches uns das leistet. Verteilungsgesetze derart, daß sich die einzelnen Partikel, bis auf einen kleinen Bruchteil, unseren optischen Hilfsmitteln entziehen, lassen sich natürlich beliebig viele angeben; damit ist aber der obigen Bedingung in keiner Weise Genüge geleistet. Denn je feiner die gegebene Masse verteilt wird, um so größer wird die gesamte von ihr reflektierte Lichtmenge. Es darf also die Zerkleinerung über eine gewisse Grenze nicht hinausgehen, wenn uns nicht der Planetoidenring am Nachthimmel eine Art Zodiakallichtphänomen hervorbringen soll, was den Tat-

¹⁾ BAUSCHINGER, Tabellen usw., S. 14.

sachen widersprüche¹⁾. Unser Problem läuft also darauf hinaus, eine solche Häufigkeitsfunktion $\varphi(M)$ der Massen M zu finden, daß einerseits die Gesamtmasse

$$a) \quad \int_0^{\infty} M \varphi(M) dM = 400$$

(die Vestamasse stets als Einheit genommen) sich ergibt, daß dabei aber die Zahl der unseren optischen Hilfsmitteln zugänglichen Körper nicht größer als von der Ordnung

$$5000$$

wird, und daß endlich die Integrallichtwirkung aller Körper keine größere Flächenhelligkeit, als

$$10^{-8}$$

der Vollmondflächenhelligkeit hervorbringt. Wie ich zu den beiden letzten Zahlen gelange, muß ich mit einigen Worten erläutern.

Was die erstere Zahl angeht, so ist sie eine bloße Schätzung, die man aber wohl als Grenze gelten lassen wird, da anderenfalls die Zahl rein zufällig auf Aufnahmen lichtstarker Instrumente entdeckter Planetoiden größer sein müßte, als sie wirklich ist²⁾. Einer eingehenderen Begründung bedarf die zweite der angegebenen Zahlen. Soviel mir bekannt ist, sind zuverlässige Bestimmungen über die Flächenhelligkeit der Milchstraße und über die Reizschwelle der Flächenhelligkeitsempfindung bisher nicht angestellt worden. Indes ist es nicht schwer, sich aus bekannten Erfahrungstatsachen wenigstens genäherte Werte für diese Größen abzuleiten. Für die Bestimmung der Flächenhelligkeit der hellsten Partien der Milchstraße kann man sich folgende Erfahrung zunutze machen. Beobachtet man Jupiter am Tage etwa, wenn er sich in Quadratur mit der Sonne befindet, so bemerkt man eine auffällige Wirkung der Phase derart, daß man zwar den eigentlichen Phasendefekt natürlich nicht wahrzunehmen vermag, daß aber der von der Phase betroffene Rand sich nur schwach von dem tageshellen Himmelshintergrund abhebt und

1) Die Beobachtungserfahrung über den sog. „Gegenschein“ des Zodiakallichts weist entschieden auf einen inneren Zusammenhang mit dem eigentlichen Zodiakallicht hin, und Herrn v. SEELIGERS Theorie dieses Phänomens gibt auch eine ausreichende Erklärung für das Anwachsen der Helligkeit im Gegenpunkt der Sonne. Aber selbst, wenn der Planetoidenring Anteil an der Erscheinung haben sollte, wie es Herr BARNARD will, so bleibt derselbe sicher unter der hier betrachteten Helligkeitsgrenze, da das ganze Gegenscheinphänomen jedenfalls so matt ist, daß es überhaupt nur bei ganz außergewöhnlichen Luftzuständen sichtbar wird.

2) Die angenommene Zahl zusammen mit den späteren Annahmen über die scheinbare geozentrisch gerechnete Breite des Planetoidenringes ergibt 0.5 Planeten auf den Quadratgrad. Das ist aber nur ein Durchschnittswert. Da die Neigungen der Planetoidenbahnen gegen ihre mittlere Ebene — es ist klar, was mit dieser Bezeichnung gemeint ist — im allgemeinen gering sind, so ist in dieser eine erheblich größere Dichtigkeit möglich. Ich habe eine große Zahl in letzter Zeit veröffentlichter Heidelberger 16-Zölleraufnahmen daraufhin untersucht, tatsächlich übertraf auf keiner derselben die für ein brauchbares Gesichtsfeld von 30 Quadratgrad gerechnete Dichte auch nur 0.4 pro Quadratgrad.

eine diesem ähnliche bläuliche Farbe zeigt, während der intakte Rand sich hell und scharf gegen die Umgebung abhebt und keine merkliche Farbänderung erleidet. Daraus ist zu schließen, daß zwar der erstere Rand beträchtlich schwächer ist als der Himmelshintergrund, da dessen Farbe deutlich vorwiegt, daß aber die stärker erleuchteten Teile der Planetenscheibe sicherlich keine geringere Flächenhelligkeit haben als der Tageshimmel. Nimmt man nun die Albedo des Mondes zu 0.17, die Jupiters zu 0.82, endlich das Verhältnis der Flächenhelligkeiten von Sonne und Mond zu $570\,000^1)$ an, so ergibt sich, daß das Verhältnis der Flächenhelligkeiten von Sonne und Tageshimmel sicher nicht kleiner ist als 2.8×10^6 . Dasselbe Verhältnis wird aber, da der Mond nicht merklich selektiv absorbiert, auch zwischen den Flächenhelligkeiten des Vollmondes und des durch ihn erleuchteten Nachthimmels bestehen. Da nun erfahrungsgemäß vor der Vollmondbeleuchtung auch die hellsten Parteen der Milchstraße verschwinden, so ergäbe sich bei Annahme der Milchstraßenflächenhelligkeit zu 10^{-8} von der des Mondes die Unterschiedsschwelle zu $> \frac{1}{36}$; das ist aber, selbst für Helligkeiten, die nicht mehr sehr weit von der Reizschwelle²⁾ entfernt sind, der äußerste noch zulässige Wert; eine größere Reihe von Bestimmungen liefert den Mittelwert $\frac{1}{100}^3)$.

Ich habe mich bemüht, über die hier in Frage kommenden Helligkeitsverhältnisse, mir auch durch Messungen einen Anhalt zu verschaffen; da es sich der Natur der Sache nach um Werte von hoher zahlenmäßiger Genauigkeit ohnehin nicht handeln kann, so konnten dazu die einigermaßen primitiven photometrischen Hilfsmittel, die mir hier zur Verfügung standen, als ausreichend erscheinen. Es handelte sich darum:

1) Das Verhältnis der Flächenhelligkeiten des völlig klaren Nachthimmels einmal bei Vollmondbeleuchtung, und andererseits ohne Mondlicht außerhalb und innerhalb der Milchstraße;

2) Das Verhältnis der Flächenhelligkeiten des Vollmondes zum vollmondbeleuchteten Himmel oder, was als gleich angenommen werden kann, der Sonne zum klaren Tageshimmel zu bestimmen.

Als Hilfsmittel dazu diente ein STEINHEILScher Absorptionskeil aus annähernd neutralem (schwach blaugrün gefärbtem) Glase. Die Beobachtungsmethode war im Fall 1) die folgende: Ich bestimmte an einem Orte außerhalb der Stadt, wo jede Störung durch künstliche Beleuchtung fortfiel, diejenigen Stellen des Keiles, für welche bei der Durchsicht die scharfgezeichneten Konturen einer Baumkrone sich nicht mehr gegen den Hintergrund abhoben.

¹⁾ Vgl. MÜLLER, Photometrie der Gestirne, S. 315, 343, 383; die Albedines sind nach der SEELIGERSchen Definition angenommen.

²⁾ Die Ausdrucksweise ist nicht ganz streng; gemeint ist die minimale, sich eben noch gegen den Himmelsgrund abhebende Flächenhelligkeit.

³⁾ MÜLLER, Photometrie, S. 13.

Als Hintergrund wurde dabei gewählt: einmal der vollmondbeleuchtete Nachthimmel, dann der unbeleuchtete Himmel und endlich die hellsten Parteen der Milchstraße im Schwan. Aus einer Reihe hellerer Sterne wurden dann unter Zugrundelegung der Potsdamer Sternhelligkeiten die beiden Keilkonstanten: der Abstand a der ideellen (durch Abschleifen tatsächlich beseitigten) Keilkante von dem durchlässigsten Ende des Keiles, und Δ das auf BRIGGSsche Logarithmen bezogene logarithmische Dekrement pro Millimeter; es ergab sich:

$$a = 16.7^{\text{mm}}$$

$$\Delta = 0.0304.$$

Man erhielt nun durch die angegebene Beobachtungsmethode die betreffenden Helligkeiten in Einheiten der minimalen eben noch merklichen Reizintensität, der Reizschwelle, ausgedrückt. Es fanden sich die Helligkeiten, f_1 des Vollmondhimmels, f_h des dunklen Nachthimmels, f_m der hellsten Parteen der Milchstraße:

$$f_1 > 18100$$

$$f_h = 179$$

$$f_m = 315.$$

Beim mondhellen Himmel war auch an der dunkeln Keilgrenze noch eine letzte Spur des Kontrastes zu bemerken, so daß ich hier nicht das Gleichheitszeichen setzen konnte. Man bemerkt, daß die Flächenhelligkeit der hellsten Parteen der Milchstraße das

$$1.77\text{fache}$$

der Helligkeit des gewöhnlichen Nachthimmels beträgt.

Es sind bei derartigen Messungen in der Nähe der Reizschwelle verschiedene Vorsichtsmaßregeln zu beachten. Natürlich hängt die Reizschwelle ab von der Stärke der „inneren Reizung“ der Netzhaut. Es ist daher dafür Sorge zu tragen, daß stets nur nach mehrere Minuten langem völligen Ausruhen des Auges durch Schließen der Lider, zu beobachten ist; denn selbst die geringe nächtliche Himmels-helligkeit ruft schon so kräftige „Nachbilder“ hervor, daß sie zu groben Täuschungen führen können. Ferner ist darauf Bedacht zu nehmen, daß längere Zeit vor der Beobachtung keinerlei Reizmittel genossen werden, die schon in recht geringen Quanten genommen durch Vergrößerung des Blutdrucks die „innere Reizung“ und damit die Reizschwelle merklich hinaufsetzen.

Recht unsicher ist die Bestimmung der Flächenhelligkeit des Tageshimmels im Vergleich zu der der Sonne, weil dieselbe einmal stark mit der Durchsichtigkeit des Himmels wechselt, und außerdem an den verschiedenen Stellen des Himmels sehr verschieden ist. Ein einfaches Mittel zur Bestimmung der durchschnittlichen Flächenhelligkeit des Himmels besteht darin, daß man die Beleuchtungsstärke, die von Sonne + Himmel auf einer horizontalen ebenen Fläche hervorgerufen wird, b_s , mit derjenigen, b_h , vergleicht, welche der Himmel allein gibt, also etwa der Helligkeit im Schatten eines schmalen stabförmigen Gegenstandes. Die Beleuchtungsstärke Sonne + Himmel kann man bei dem

starken Überwiegen des ersteren Bestandteils und der unvermeidlichen Unsicherheit der Bestimmung gleich der der Sonne allein setzen. Nimmt man nun als Abhängigkeit der Beleuchtungsstärke vom Inzidenzwinkel das einfache $\cos =$ Gesetz, so ergibt sich offenbar, falls c die Flächenhelligkeit des Himmels, welche als konstant angenommen wird, ist:

$$b_h = k \cdot c \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} \int_{h=0}^{h=\frac{\pi}{2}} \sin h \cos h \, dh \, d\psi = k \cdot c \cdot \pi$$

Ist ferner h_s die Höhe der Sonne im Beobachtungsmoment, c' die Flächenhelligkeit der Sonne und r der scheinbare Radius, so ist

$$b_s = k \cdot c' \cdot \pi \cdot \sin^2 r \sin h_s.$$

Ist endlich das Verhältnis $\frac{b_s}{b_h} = \gamma$ beobachtet, so findet man

$$c' = \frac{\gamma}{\sin^2 r \cdot \sin b_s} c.$$

Eine Reihe von Messungen an dem sehr klaren, nur durch den unvermeidlichen Dunst der Stadt getrübbten April 12, 1910 ergab

$$\begin{aligned} \gamma &= 20 \\ \text{und im Mittel} \quad h_s &= 34^\circ.5. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der rund 16% betragenden Extinktion¹⁾ ergibt sich:

$$c' = c \times 1.89 \times 10^6$$

das heißt also, daß die durchschnittliche Flächenhelligkeit des Himmels etwas größer als $\frac{1}{2000000}$ von der der Sonne ist; unser Wert $\frac{c'}{c}$ dürfte also sicher, da die Flächenhelligkeit der der Sonne näheren Teile des Himmels weit über dem Durchschnitt liegt, eine obere Grenze für die Helligkeit der etwa 90° von der Sonne entfernten Teile des Himmels sein.

Läßt man das gleiche Verhältnis für den Vollmond und die durch ihn hervorgerufene Beleuchtung gelten, so ergibt sich, in Einheiten der Vollmondfächenhelligkeit ausgedrückt:

$$\begin{aligned} f_h &= \frac{1}{1.92} \times 10^{-8} \\ f_m - f_h &= \frac{1}{2.48} \times 10^{-8}. \end{aligned}$$

Diese Helligkeit also, der normalen Himmelshelligkeit überlagert, genügt bereits, um das so auffällige Milchstraßenphänomen hervorzubringen. Dasselbe würde also a fortiori für die S. 108 als zulässige Grenze angegebene Zahl der Fall sein.

¹⁾ A. BEMPORAD, Zur Theorie der Extinktion des Lichtes. Mitteilungen d. Gr. Sternwarte zu Heidelberg, Nr. IV, S. 69.

Die Forscher, welche glaubten, eine Planetoidenmasse gleich der des Mars mühelos unterbringen zu können, haben auf die Tatsache¹⁾, daß das menschliche Auge für Flächenhelligkeiten unvergleichlich viel empfindlicher ist, als für Punkthelligkeiten, nicht ausreichend Rücksicht genommen.

Nach der Erledigung dieser vorbereitenden Frage wenden wir uns nun der eigentlichen Aufgabe dieses Abschnittes, so wie sie eingangs desselben formuliert ist, zu. Wir machen dazu eine Reihe von Hypothesen über die Häufigkeitsfunktion der Massen, $\varphi(M)$, für die alle die Hauptbedingung a) erfüllt sein muß; im einzelnen sollen sie so abgestuft werden, daß sie teils der ersten, teils der zweiten phänomenologischen Nebenbedingung möglichst vollkommen gerecht werden; es wird sich dann zeigen, ob es möglich ist, beiden zugleich gerecht zu werden. Als Zusammenhang zwischen Masse und mittlerer Oppositionsgröße wird stets der früher schon benutzte angenommen, welcher das allenfalls noch plausible Maximum der Masse im Verhältnis zur Helligkeit ergibt. Was zunächst den allgemeinen Charakter von $\varphi(M)$ angeht, so ist klar, daß es mit abnehmendem M sehr stark ansteigen, mit anderen Worten, daß die Zahl der kleinen Massen außerordentlich groß sein muß, wenn der Gesamtwert 400 erreicht werden soll; denn es ist sicher, daß zwischen den bisher bekannten Grenzen 1 und 10^{-5} genommen $\int M \varphi(M) dM$ den Wert 5 nicht übersteigen kann. Demgemäß nehme ich bei den drei ersten Hypothesen für $\varphi(M)$ die einfache analytische Form

$$1) \quad \varphi(M) = c M^{\lambda-1}$$

an. Zunächst ist nun klar, daß man bei der gewählten Form von $\varphi(M)$ aus physikalischen Gründen nicht bis $M = 0$, sondern nur bis zu dem kleinen endlichen Werte $M = M_0$ hinabgehen darf; wählt man ferner als Einheit der Masse die größte überhaupt vorkommende, so ergibt sich als obere Integrationsgrenze 1. Außerdem besteht zwischen den drei Konstanten c , λ , M_0 die aus a) folgende Beziehung. Einer weiteren Bedingung sind diese Konstanten dadurch unterworfen, daß die theoretische Häufigkeitskurve mit der empirischen an der Stelle, wo letztere am besten bestimmt ist, übereinstimmen muß. Wo dieser Punkt liegt, bleibt einer gewissen Willkür unterworfen; jedenfalls möglichst weit von der oberen Grenze $M = 1$, wo die Frequenzkurve praktisch aufhört, definiert zu sein. Folgende Festlegung dieses empirischen Elementes scheint mir den Tatsachen am besten zu entsprechen und jedenfalls eher zu viel, als zu wenig von der Gesamtmasse auf die großen Körper zu werfen: Erfahrungsgemäß werden Planetoiden > 12.0 nur noch

1) Es spielt eben für die Lichtempfindung des Auges nicht die jedes einzelne lichtempfindliche Element der Netzhaut treffende, sondern die überhaupt ins Auge gelangende Lichtmenge die entscheidende Rolle. Es gelten daher alle angegebenen Zahlen nur für Flächen beträchtlicher scheinbarer Größe. Zusammenhängende Untersuchungen über die Abhängigkeit der subjektiven Flächenhelligkeitsempfindung von der scheinbaren Größe der leuchtenden Fläche existieren meines Wissens nicht

sehr selten aufgefunden. Diese Größe entspricht am äußersten Rande des Planetoidenringes einem Halbmesser von etwa 96 km, in der mittleren Planetoidenentfernung etwa 40 km. Man wird nun mit der Wirklichkeit etwa in Einklang kommen, wenn man annimmt, daß von den Planetoiden zwischen 70—80 km Durchmesser gerade die Hälfte aller vorhandenen bisher bekannt ist. Das ergibt mit Zugrundelegung der Planeten 1—630 laut Abzählung zwischen den Grenzen $M = \frac{0.0071}{47}$ die Massensumme 0.3724 als zweite Be-

dingung für die drei Konstanten; es mag hier nochmals hervorgehoben werden, daß als Zusammenhang zwischen Masse, Durchmesser, mittlerer Oppositionsgrößenklasse stets der auf S. 105 auseinandergesetzte angenommen wird. Den Versuch, der am nächsten zu liegen scheint, nämlich λ empirisch zu bestimmen, führe ich nicht numerisch durch, weil der gesamte Verlauf der empirischen Häufigkeitskurve doch nicht sicher genug bestimmt ist, daß dem daraus resultierenden Werte von λ Beweiskraft in unserer Fragestellung zukäme. Nur so viel soll im Anschluß an die Hypothese I festgestellt werden, daß das Stück der Häufigkeitskurve, das einigermaßen sicher bestimmt ist, darauf hinweist, daß in Wahrheit $\lambda > -1$ ist, also zu noch unzulässigeren Konsequenzen, wie jene Hypothese, führen würde.

Die Abstufung der drei ersten Hypothesen ist nach folgendem Grundsatz vorgenommen: Wir wählen zunächst für λ den Wert -1 , wodurch, wie wir sahen, jedenfalls die Bedingung a) erfüllt werden kann. Es zeigt sich aber, daß diese Hypothese I zu verwerfen ist, da sie zu einem physikalisch unmöglichen Werte von M_0 führt; a fortiori ist dann auch das empirisch bestimmte λ mit der Bedingung a) unvereinbar. Die II. Hypothese wählt daher für M_0 einen Wert, der der Masse eines kleinen Staubpartikels entspricht. Dadurch wächst $|\lambda|$ nur wenig, aber die resultierende Flächenhelligkeit bringt auch diese Hypothese zu Fall. Darum machen wir den dritten Versuch, indem wir M_0 gleich der kleinsten bisher festgestellten Planetoidenmasse annehmen. Dann wird allerdings die Flächenhelligkeit auf ein zulässiges Maß herabgedrückt, aber die Zahl der entdeckbaren Planetoiden steht mit der ersten phänomenologischen Nebenbedingung in schärfstem Widerspruch. Mit der einfachen Form 1) für die Häufigkeitsfunktion ist also die Bedingung a) keinesfalls ohne Widerspruch gegen die Erfahrung zu erfüllen. Es bleibt also für die Häufigkeitsfunktion nur noch folgender Charakter möglich: Sie folgt bis zu den kleinsten entdeckbaren Größen einem Gesetze der Form 1) mit dem empirischen λ -Werte und steigt dann jenseits der Entdeckbarkeitsgrenze sehr steil zu einem Maximum an, um dann sehr schnell zum Nullpunkte abzufallen. Das phänomenologisch Charakteristische eines solchen Verlaufes der Häufigkeitskurve stellt man am einfachsten dar, indem man die Planetoiden einteilt in „entdeckbare“ mit der Gesamtmasse 5 und in „unentdeckbare“, die den Rest von 395 zu decken hätten. Das wird unsere Hypothese IV sein; auch sie ist mit den tatsächlichen Erscheinungen nicht in Einklang zu bringen, wo-

durch dann die Unmöglichkeit der Grundvoraussetzung a) erwiesen ist. Zur Vereinfachung der Rechnung nehme ich im folgenden durchweg alle Planeten in der mittleren Entfernung 2.7 an, was bei dem nahezu symmetrischen Verlaufe der Dichtigkeitskurve gerechtfertigt ist. Die geozentrische Breite des Planetoidenringes im Gegenpunkt der Sonne wird zu etwa 30° angenommen; die genauere, scheinbar umständliche, aber für die Rechnung und vor allem für den Vergleich mit der als Einheit gewählten Mondflächenhelligkeit bequemste Definition ist dadurch gegeben: Ich nenne „reduzierte“ Totalhelligkeit J das Integral über die Oppositionshelligkeiten der sämtlichen Einzelkörper. Dann soll die Flächenhelligkeit F durch $\frac{J f}{50\,000}$ ausgedrückt sein, wo das $f = 10^{-8}$

das Verhältnis der Oppositionshelligkeit¹⁾ der Vesta (7.0)^m zu der des Vollmondes (—13.0)^m bedeutet; man sieht leicht ein, daß diese Definition numerisch nahe mit der obigen ungefähren Angabe übereinstimmt, da der Flächeninhalt des 30° breiten Gürtels rund 50 000 Vollmondflächen beträgt. Es ist übrigens vorausgesetzt, daß die Flächenhelligkeit längs eines durch den Gürtel im Gegenpunkt gelegten Querschnittes konstant ist, während sie natürlich in Wahrheit in den zentralen Teilen ein Maximum hat, und von da nach außen abfällt. Ich schicke den drei ersten Hypothesen eine Zusammenstellung der analytischen Ausdrücke der für sie geltenden Grundbedingungen, sowie der für die phänomenologischen Schlußfolgerungen wichtigen Zahlen voraus:

$$\begin{aligned} 1) \quad \varphi(M) &= c M^{\lambda-1} \\ a) \quad c \int_{M_0}^1 M^{\lambda} dM &= 400 \\ &\quad 0.0071 \\ b) \quad c \int_{0.0047}^{0.0071} M^{\lambda} dM &= 0.3724 \end{aligned}$$

die Gesamtzahl der Planetoiden:

$$Z = c \int_{M_0}^1 M^{\lambda-1} dM$$

die reduzierte Totalhelligkeit:

$$J = c \int_{M_0}^1 M^{\lambda-1/3} dM$$

wo die Einheit der Helligkeit die Oppositionshelligkeit¹⁾ der Vesta ist. Eine mögliche Überdeckung der Körper brauchen wir weiter nicht zu berücksichtigen, da wir von vornherein wissen, daß eine solche stets dann eingetreten sein muß, wenn die resultierende Flächenhelligkeit wenigstens $\frac{0.24}{0.17 \times (2.7)^2} = 0.19$

1) Gemeint ist diejenige Oppositionshelligkeit, die Vesta haben würde, wenn sie sich in der mittleren Entfernung 2.7 befände.

der Mondflächenhelligkeit wird. Endlich wird die Gesamtzahl der Planetoiden von den größten bis zu den kleinsten bisher bekannten:

$$E = c \int_{10^{-5}}^1 M^{2-1} dM.$$

Wir gehen nun über zu den einzelnen Hypothesen:

I. Hypothese:

Zu den Bedingungen a) und b) tritt $\lambda = -1$.

Dann ergibt

$$a): \frac{1}{M_0} = \frac{400}{c}$$

$$b): c = \frac{0.3724}{\ln \frac{0.0071}{0.0047}} \text{ also}$$

$$c = 0.9298$$

$$\frac{1}{M_0} = 0.677 \times 10^{187}$$

$$Z = 0.630 \times 10^{187}$$

$$J = 5.28 \times 10^{62}$$

$$E = 92980.$$

Man sieht unmittelbar, daß wir uns mit dieser Hypothese nicht weiter zu befassen brauchen, da M_0 einen physikalisch absurden Wert erhält; damit werden von selbst auch die andern Zahlen hinfällig. Bemerkenswert ist aber, daß dieses Resultat bereits herauskommt, obgleich $\lambda = -1$ bereits ein stärkeres Anwachsen von $\varphi(M)$ mit abnehmendem M bedingt, als wir nach unserer Erfahrung anzunehmen berechtigt sind. Das deutet ja schon der große Wert von E an. Klar geht es aber aus der Tabelle hervor, die ich im Anschluß jetzt geben will; sie ist folgendermaßen entstanden: Ich habe alle unter den bekannten 630 Planeten, für die $\log a < 0.46$ ist, den Halbmessern nach in die Rubriken 120—110 km, — — — — 50—40 km eingeordnet. Daß dies, die Unabhängigkeit von $\varphi(M)$ von der Entfernung vorausgesetzt, ein sehr nahe zutreffendes Bild von den relativen Häufigkeiten geben wird, geht daraus hervor, daß von den Planeten 530—630 nur noch 6 in diese Kategorie hineinfallen.

Die Resultate der Abzählung gibt folgendes Tableau:

φ	M	Z	Z'
120—110 km	0.02380—0.01835	2	2
110—100 „	1835— 1375	5	4
100— 90 „	1375— 1005	10	7
90— 80 „	1005— 706	4	11
80— 70 „	706— 476	19	17
70— 60 „	476— 298	27	25
60— 50 „	298— 172	37	38
50— 40 „	172— 88	55	55

Die erste Rubrik gibt die Halbmesser-, die zweite die entsprechenden Massengrenzen, die Kolonne Z die wirklich gezählten, die Kolonne Z' die graphisch ausgeglichenen Zahlen. Daraus kann man $\varphi(M)$, $M \varphi(M)$, $M^2 \varphi(M)$ berechnen. Ich gebe in der folgenden Tabelle die wahren Werte dieser Funktionen, indem ich in Klammern zugleich die aus der Kolonne Z' abgeleiteten ausgeglichenen Werte angebe. Ein beigegefügtes Diagramm (Fig. 2 Tafel II) mag die Verhältnisse verdeutlichen; hier sind die Kurven durch die jeweilig aus Z' folgenden Werte gelegt; der Ordinatenmaßstab für jede Kurve ist lediglich nach Rücksichten zeichnerischer Bequemlichkeit gewählt.

M	$\varphi(M)$	$M \varphi(M)$	$M^2 \varphi(M)$
0.02095	370 (370)	7.7 (7.7)	0.161 (0.161)
1596	1090 (860)	17.4 (13.8)	277 (222)
1182	2700 (1860)	32.0 (21.9)	378 (265)
847	1340 (3750)	11.3 (31.8)	096 (271)
582	8150 (7420)	47.5 (43.2)	276 (255)
379	15430 (14510)	58.5 (55.0)	222 (211)
229	28900 (29730)	66.2 (68.1)	151 (155)
126	65410 (65410)	82.4 (82.4)	103 (103)

Man sieht, daß sich durch die zu den Z' gehörigen Punkte glatte Kurven legen lassen (Fig. 2), von denen die tatsächlichen Einzelwerte besonders für die größeren M zum Teil beträchtlich abweichen; das liegt eben im Wesen solcher Häufigkeitskurven. Die Kurve $M^2 \varphi(M)$ müßte, wenn die Annahme der Hypothese I über λ den Tatsachen entspräche, eine gerade Linie sein, die der M-Achse parallel läuft. Das ist nicht der Fall; aus dem am besten definierten Teil der $M^2 \varphi(M)$ -Kurve von $M = 0.001$ — 0.006 geht vielmehr mit Deutlichkeit hervor, daß dieselbe mit abnehmendem M in den Nullpunkt hineinläuft. Daß die Kurve für wachsendes M später wieder abnimmt, darauf ist kein großes Gewicht zu legen, wegen der dort schon beginnenden Unsicherheit; übrigens würde sie bei Fortführung bis $M = 1$ wieder sehr beträchtlich steigen. Soweit es also überhaupt zulässig ist, die empirische Häufigkeitsfunktion $\varphi(M)$ in der Form 1) darzustellen, ist sicherlich $|\lambda| < 1$. Es muß noch einmal betont werden, daß das Verhalten der Häufigkeitskurve nicht etwa dadurch erklärt werden kann, daß von den Planeten zwischen 12.0 und 10.0 noch relativ mehr unentdeckt sind; für alle Instrumente, die zu Planetenentdeckungen benutzt werden, sind vielmehr die Entdeckbarkeitschancen bis zur 12.0 jedenfalls annähernd gleich. Aber natürlich dürfen wir auf diesem Ergebnis keinerlei weitere Schlüsse aufbauen; es sagt uns eben nur, was wir schon wußten: daß, wenn a) richtig ist, eben der bei weitem überwiegende Teil der Gesamtmasse auf die kleinen Körper verteilt ist; für diese aber können wir die Häufigkeitsfunktion empirisch nicht bestimmen; sie könnte sehr wohl

einem anderen λ zugehören. Wir fahren daher fort in der Durchrechnung spezieller Hypothesen.

Hypothese II: Zu a) und b) tritt jetzt eine physikalisch zulässige Annahme über M_0 ; es soll von der Größenordnung eines kleinen Staubkörnchens sein. Für die Rechnung wählen wir den speziellen Wert $M_0 = 10^{-30}$, d. h. etwa $= \frac{1}{600}$ mg.

Dann gibt:

$$a) \frac{c}{\lambda + 1} \left(1 - 10^{-30} (\lambda + 1) \right) = 400,$$

$$b) \frac{c}{\lambda + 1} \left(0.0071 \lambda + 1 - 0.0047 \lambda + 1 \right) = 0.372 \pm.$$

Daraus zur Bestimmung von λ :

$$1 - 10^{-30} (\lambda + 1) = 1060 (0.0071 \lambda + 1 - 0.0047 \lambda + 1).$$

Für die numerische Lösung dieser Gleichung ist zu beachten, daß die rechte Seite sich als Differenz zweier wenig voneinander verschiedenen Zahlen darstellt, da $\lambda + 1$ eine kleine Größe ist; aus diesem Grunde ist aber gerade eine Entwicklung der Potenzen nach $\lambda + 1$ bequem. Man findet dann durch successive genauere Bestimmung des Schnittpunktes der Kurven links und rechts des Gleichheitszeichens schon bei der dritten Näherung den als definitiv anzusehenden Wert

$$\lambda = -1.0470$$

und damit:

$$c = 0.7571.$$

Daraus ergibt sich dann weiter:

$$Z = 1.86 \times 10^{31}$$

$$J = 5.35 \times 10^{11}$$

$$E = 124\,200.$$

Man sieht, daß E bereits beträchtlich angewachsen ist. Trotzdem ist J noch das 5350fache der Vollmondhelligkeit und demgemäß die Flächenhelligkeit rund $\frac{1}{10}$ von der des Mondes. Also auch diese Hypothese ist unhaltbar. Man sieht bereits, wie bei weiterer Vergrößerung von M_0 gleichzeitig J ab- und E zunimmt; jedoch schon bei diesen extremen Werten von J ist E größer, als wir aus der Erfahrung anzunehmen geneigt sind. Wir gehen nun in der

Hypothese III gleich zu dem anderen Extrem über, daß wir $M_0 = 10^{-5}$ setzen, d. h. gleich dem kleinsten bisher bekannten Massenwert. Dann ergibt sich aus a) und b) ganz analog wie bei II:

$$1 - 10^{-5} (\lambda + 1) = 1060 (0.0071 \lambda + 1 - 0.0047 \lambda + 1).$$

Hier dürfen wir, da $\lambda + 1$ nicht mehr klein ist, die rechte Seite nicht, wie vorher reduzieren, aber das graphisch-numerische Approximationsverfahren führt auch hier schnell zur endgültigen Lösung:

$$\lambda = -1.9432$$

woraus dann folgt:

$$c = 0.00727$$

$$Z = E = 1.95 \times 10^7$$

$$J = 1.39 \times 10^4.$$

Durch die allgemeinen Helligkeitsverhältnisse würden wir mit dieser Hypothese nicht mehr in Widerspruch zur Erfahrung geraten, da J nur noch der Helligkeit eines Sternes -3^m entspricht, auch die Flächenhelligkeit im Gegenpunkt bleibt mit $\frac{1}{3.5} \times 10^{-8}$ erheblich unterhalb der gezogenen Grenze, wenngleich sie immerhin schon der Reizschwelle sicher sehr nahe liegt. Trotzdem ist auch diese Hypothese unhaltbar. Denn der Masse $M_0 = 10^{-5}$ entspricht in der mittleren Entfernung der kleinen Planeten die Größenklasse 15.3. Dies dürfte für mittlere Geschwindigkeiten selbst bei guten Luftverhältnissen etwas unter der Leistungsgrenze des hauptsächlichsten Entdeckungsinstruments, des Heidelberger 16-Zöllers, aber oberhalb derjenigen für die lichtstarken Reflektoren liegen. In diesen müßte also wenigstens die Hälfte der vorhandenen Planeten, $\frac{Z}{2}$, der Entdeckung zugänglich sein, das wären rund 1000 auf den Quadratgrad. Tatsächlich dagegen dürfte auch für die lichtstärksten Instrumente die Dichtigkeitszahl 1 für jenes Areal nicht erreicht werden, da sonst die Zahl der zufällig entdeckten Planeten viel größer sein müßte. Aus der Durchrechnung unserer drei ersten Hypothesen geht also zunächst mit Bestimmtheit hervor, daß unter Zugrundelegung einer analytisch einheitlichen Häufigkeitsfunktion der Form 1) die Bedingung a) auf keine Weise erfüllt werden kann, ohne daß man mit der Erfahrung in Widerspruch gerät.

Hypothese IV. Es bliebe also nur noch die Möglichkeit übrig, daß die Häufigkeitskurve gleich hinter der Entdeckbarkeitsgrenze steil zu einem Maximum anstiege, um ebenso schnell wieder gegen 0 abzufallen. Ich will darum als letzte Hypothese den schon früher skizzierten Extremfall durchrechnen, der unter diesen Bedingungen die geringste Flächenhelligkeit ergibt. Es sei also die Masse 5 auf die Planeten der heute bekannten Größenordnungen verteilt. Der Rest von 395 falle auf die „unentdeckbaren“ Körper, d. h. solche, die jenseit der Leistungsgrenze der lichtstärksten Instrumente liegen. Da Planeten 18^m von Herrn WOLF bereits photographiert sind, so nehme ich äußerste Leistungsgrenze unserer heutigen optischen Instrumente die 20^m an. Läßt man dann, wie bereits früher überall, die Verschiedenheit der mittleren Entfernung unberücksichtigt, so ergibt sich für die „unentdeckbaren“ Planetoiden:

$$Z = 2.52 \times 10^{10}$$

$$J = 1.60 \times 10^5.$$

Daraus resultierte für die Flächenhelligkeit der Wert $\frac{1}{30} 10^{-6}$, womit die äußerste zulässige Grenze bei weitem überschritten wäre. Damit ist aber auch die Unmöglichkeit der Voraussetzung a) erwiesen. Mit anderen Worten:

Wenn man nicht den Planetoiden ganz unwahrscheinlich große Dichten und unwahrscheinlich geringe Albedines zuschreiben will, so ist es unmöglich, eine Masse gleich der des Mars so in dem von den Planetoidenbahnen bestrichenen Raume unterzubringen, daß sie sich nicht schon rein phänomenologisch bemerkbar machte. Immerhin ließe die Erfahrung, allerdings nur, wenn man den recht unwahrscheinlichen Fall gelten läßt, daß ein Häufigkeitsgesetz ähnlich dem der Hypothese IV zugrundeliegenden herrscht, die Möglichkeit zu, daß die Gesamtmasse der Planetoiden $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$ ¹⁾ von der des Mars betrüge. Wir müssen also nunmehr zu der Untersuchung übergehen, ob uns unsere bisherigen Kenntnisse über die Bewegungen der kleinen Planeten weiteren Aufschluß zu geben vermögen.

III.

Das Problem, die Störungen eines Planetoiden durch die Gesamtheit der übrigen zu bestimmen, ist durchaus verschieden von denen, die sonst im allgemeinen die Himmelsmechanik behandelt. Es ist kein n-Körperproblem im gewöhnlichen Sinne; denn man kann natürlich nicht daran denken, als Störungsfunktion die Summe der mit den Massen multiplizierten reziproken Entfernungen der einzelnen störenden Körper vom zu untersuchenden gestörten einzuführen. Abgesehen von der praktisch nicht zu bewältigenden Komplikation wäre das auch deshalb unmöglich, weil wir ja damit rechnen müssen, daß der größte Teil der Planetoiden, nicht nur der Zahl, sondern auch der Gesamtmasse nach, uns noch unbekannt ist. Setzt man aber nur voraus, daß die Gesamtmasse stets innerhalb eines bestimmten endlichen Raumes verbleibt, so wird der Betrag des störenden Potentials von der zufälligen momentanen Konstellation um so weniger abhängen, je feiner die Massenverteilung ist. Man wird also in diesem Falle die Wirkung der tatsächlich fortwährend wechselnden durch die einer zeitlich unveränderlichen Durchschnittsanordnung, durch eine „repräsentierende Hypothese“ ersetzen können; auf die praktische Wahl einer solchen kommt alles an. „Praktisch“ heißt in diesem Falle: Die Hypothese muß die wirklichen Störungen nicht nur qualitativ, sondern auch sehr genähert quantitativ darstellen, darf aber auf der anderen Seite nicht komplizierter sein, als es sich beim Charakter der ganzen Untersuchung als Durchschnittsbetrachtung eben lohnt. Es kommt damit von vornherein eine unvermeidliche Willkürlichkeit in unsere Fragestellung hinein, die man auch nicht, wie es etwa in der kinetischen Gastheorie möglich ist, wenigstens innerhalb des Geltungsbereiches der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Notwendigkeit erheben kann. Der Begriff „praktisch“, wie wir ihn vorher aufgefaßt haben, hängt nämlich in hohem Grade auch noch davon ab, für welchen speziellen Zweck die repräsentierende Hypothese gebraucht werden soll.

Die Forscher, die bisher versucht haben, die Gesamtmasse der Planetoiden zu bestimmen, haben dabei immer nur das Ziel im Auge gehabt, die zutage

¹⁾ Vgl. S. 108.

getretenen Anomalien in den Säkulärstörungen des Mars zu erklären; daher haben sie sich auch stets auf sehr einfache repräsentierende Hypothesen beschränken können. Herr HARZER¹⁾ führt als repräsentierende Hypothese die eines kreisförmig in der Ekliptik in der mittleren Planetoidenentfernung [$\log a = 0.43$] um die Sonne laufenden Planeten ein, der die Gesamtmasse trägt. Das ist, da Herr HARZER allein die Säkularstörungen betrachtet, mit der Hypothese eines Kreisringes vom selben Radius gleichbedeutend. Herr RAVENÉ²⁾ gibt dem fingierten Planeten eine endliche Exzentrizität und Neigung, oder, im Sinne der letzten Bemerkung, verteilt die Gesamtmasse auf einem elliptischen gegen die Ekliptik geneigten Ringe dem GAUSSschen Gesetze³⁾ entsprechend. Das ist an sich wohlberechtigt; denn wir wissen⁴⁾, daß die charakteristischen Erscheinungen, die in der Verteilung der Perihel- und Knotenlängen der Planetoidenbahnen, wie auch das Verhalten der durchschnittlichen Exzentrizitäten und Neigungen als Funktionen je des konjugierten der ersteren Elemente, nicht auf Zufall beruhen, sondern infolge der Säkularstörungen durch die großen Planeten dauernde Durchschnittszustände darstellen. Trotzdem ist wohl Herrn HARZERS Kritik⁵⁾ beizustimmen, daß angesichts des großen mittleren Fehlers von 40 % seines Wertes, der der Bestimmung des unerklärten Restes in der Säkularbewegung des Marsperihels anhaftet⁶⁾, jene Komplikation eben nicht praktisch ist. Eine eingehende Theorie der Planetoidenringstörungen auf Grund der HARZERSchen repräsentierenden Hypothese hat Herr WILKENS⁷⁾ gegeben. Da sie infolge der Einfachheit der zugrunde liegenden Anordnung der störenden Massen zu sehr einfachen und für die numerische Behandlung handlichen Ausdrücken führt, wird man sie überall da bevorzugen, wo sie eine ausreichende Annäherung an die wirklichen Verhältnisse verspricht, also in der Theorie der großen Planeten, gewisser periodischer Kometen und vielleicht der an der äußeren und inneren Grenze des Planetoidengürtels sich bewegender kleiner Planeten. Dagegen kann ich betreffs der Zulässigkeit der einfachen repräsentierenden Hypothese auch für die Störungen der einzelnen an den dichteren Stellen des Ringes gelegenen Planetoiden Herrn WILKENS nicht beistimmen. Denn natürlich wird bei der eindimensionalen Massenverteilung bereits das störende Potential im Ringe selbst logarithmisch ∞ , die störende Kraft ∞^1 . Es wird daher diese Theorie gerade für die dichtesten Stellen im Planetoidenringe, die für die Bestimmung

1) Siehe die oben zitierte Preisschrift pag. 208.

2) Astr. Nachr. 3359.

3) GAUSS, Werke III pag. 331: „si ejus massa per totam orbitam ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispartita“.

4) NEWCOMB, Astr. Nachr. 1382.

Mein Aufsatz, Astr. Nachr. 4122.

5) Astr. Nachr. 3362.

6) NEWCOMB, Astronomical Constants pag. 110.

7) Astr. Nachr. 4036.

der störenden Gesamtmasse am wichtigsten sind, und damit für die bei weitem überwiegende Zahl der Planetoiden versagen. Wenn auch Herr WILKENS selbst auf die beschränkte Gültigkeit seiner Theorie hinweist, so muß doch unter Berufung auf die spätere Gegenüberstellung der Resultate schon hier hervor gehoben werden, daß die Tabelle für die Störungen, die pag. 59 des zitierten Aufsatzes gegeben ist, geeignet erscheint, irrige Vorstellungen über den Gültigkeitsbereich der einfachen Theorie und über die möglichen Größenordnungen der auftretenden Störungen zu erwecken¹⁾.

Um nun die Masse des Planetoidenringes auf mechanischem Wege möglichst sicher zu bestimmen, müssen wir aber gerade, wie sich später zeigt, solche Planeten heranziehen, für welche die WILKENSSche Theorie nicht mehr gilt; es muß also unsere erste Aufgabe sein, jetzt zu einer neuen, für alle Werte der mittleren Entfernung gültigen repräsentierenden Hypothese zu gelangen, die also vor allen Dingen die Bedingung erfüllen muß, eine überall stetige und stetig derivierbare Störungsfunktion zu ergeben. Denn es ist klar, daß die tatsächlichen Störungen nirgends unstetig, unendlich oder auch überhaupt nur beträchtlich groß werden können, solange man sehr starke Annäherungen an einzelne der massigeren Planeten ausschließt; das ist aber selbstverständlich die notwendige Voraussetzung für die ganze Untersuchung. Man darf demnach als repräsentierende Hypothese weder eine ein- noch eine zweidimensionale, sondern muß eine kontinuierliche räumliche Massenbelegung voraussetzen; erst wenn die allgemeine Störungstheorie auf Grund dieser Voraussetzung entwickelt ist, läßt sich beurteilen, welche Vereinfachungen eventuell für die numerische Rechnung getroffen werden dürfen. Unsere bisherige tatsächliche Erfahrung über die Zusammensetzung des Planetoidenringes entspricht freilich diesem Bilde einer kontinuierlichen räumlichen Massenverteilung scheinbar nicht; danach wäre vielmehr der überwiegende Teil der Gesamtmasse auf die wenigen großen Körper verteilt. Die Alternative, über die unsere Untersuchung entscheiden soll, ist ja aber gerade diese: Entweder die Gesamtmasse ist von der Größenordnung der Marsmasse; dann muß der überwiegende Teil desselben sich auf sehr viele sehr kleine Körper verteilen, mit anderen Worten, unsere Annahme einer kontinuierlichen Raumerfüllung nahe zutreffen; oder aber, die Gesamtmasse ist, wie rein phänomenologisch-statistisch zu schließen ist, von der Ordnung der Vestamasse, dann trifft unsere Vorstellung nicht zu, dann sind aber, gleichviel, welche repräsentierende Hypothese wir machen, unter allen Umständen die gegenseitigen Planetoidenstörungen (von extremen Proximitäten abgesehen) zu klein, als daß sie aus unserem bisherigen Erfahrungsmaterial festgestellt werden könnten.

¹⁾ Vgl. die numerische Gegenüberstellung pag. 47. Dieselbe ergibt als maximale jährliche Säkularstörungen in Perihellänge $-0.''7$, während Herrn WILKENS' Tabellen solche von der Größenordnung $+3000''$ noch enthält, ein Zeichen, daß jene Tabellen viel zu weit an die singuläre Stelle der Störungsfunktion herangeführt sind.

Die wichtigste Vorbedingung für die Gewinnung einer „praktischen“ repräsentierenden Hypothese ist die, daß wir uns eine Vorstellung davon bilden müssen, wie sich in Wirklichkeit die durchschnittliche räumliche Verteilung der kleinen Planeten gestaltet. Diese Möglichkeit wird dadurch erleichtert, daß, wie die Untersuchungen Herrn BAUSCHINGERS¹⁾ ziemlich klar gezeigt haben, die nach den einzelnen Elementen genommenen Häufigkeiten nur Funktionen je des betreffenden Elementes, nicht aber der anderen sind. Lassen wir die Exzentrizität beiseite, die für das Folgende keine Rolle spielt, so wird die einzelne Bahn durch Halbmesser, Neigung und Knoten definiert. Es seien nun $\varphi(a)$ und $\psi(i)$ die nach den Halbachsen und Neigungen genommenen Häufigkeitsfunktionen. Die Häufigkeitsfunktion $\chi(\Omega)$, wo Ω die Knotenlänge bedeutet, kann als konstant angesehen werden²⁾. Sei nun N die Gesamtzahl der Planetoiden, so ist die Zahl derjenigen unter ihnen, für welche mittlere Entfernung bzw. Neigung zwischen a und $a + da$, bzw. zwischen i und $i + di$ liegen, gegeben durch:

$$1) \quad n(a, i) = N \varphi(a) \psi(i) da di.$$

Die sämtlichen durch a und i charakterisierten Bahnen können, wenn man Glieder der Ordnung i^2 unberücksichtigt läßt, als auf dem Mantel eines Kreiszylinders vom Radius a , dessen Erzeugende senkrecht zur Ekliptik stehen, liegend angesehen werden. Längs des einzelnen durch a, i, Ω charakterisierten Kreisringes sind nun die Planeten gleichförmig verteilt. Denn angenommen, sie seien es ursprünglich nicht gewesen, so wird sich dieser Zustand, wofern nur genügend Zeit vorhanden gewesen ist, ganz von selbst eingestellt haben, da der Schwankung der mittleren Entfernung zwischen $a + da$ eine analoge Schwankung der mittleren Bewegung zwischen n und $n + dn$ entspricht. Bezeichnet jetzt z den Abstand eines Punktes von der Ekliptik, so wird durch a und z eine zur Ekliptik parallele Zone auf dem Kreiszylinder definiert. Sei $v(a, z)$ die Anzahl der sich in der Zone zwischen a und $a + da$ bzw. z und $z + dz$ befindenden Planeten, so ist

$$2) \quad v(a, z) = N \varphi(a) da dz \frac{1}{\pi} \int_{i = \arcsin \frac{z}{a}}^{i = i_0} \frac{\psi(i) di}{\sqrt{a^2 \sin^2 i - z^2}}$$

wo i_0 die größte vorkommende Neigung bedeutet. Man kann $v(a, z)$ noch auf eine andere Form bringen:

1) Siehe die schon zitierten „Tabellen usw.“.

2) Die erfahrungsgemäß vorhandene Ungleichmäßigkeit in der Verteilung der Knotenlängen würde ja, wenn NEWCOMBS Erklärung für diese Erscheinung, Astr. Nachr. 1382, den Tatsachen entspricht, beim Übergange von der Ekliptik zur invariablen Ebene nahezu wegfallen. Bei der geringen Neigung beider Ebenen gegeneinander können wir aus später noch eingehender zu erörternden Gründen jene Ungleichmäßigkeit außer Betracht lassen.

$$3) \quad v(a, z) = N \varphi'(a) \psi' \left(\frac{z}{a} \right) da dz, \quad \text{wo offenbar}$$

$$3') \quad \varphi'(a) = \frac{1}{\pi} \frac{\varphi(a)}{a}, \quad \psi' \left(\frac{z}{a} \right) = \int_{i = \arcsin \frac{z}{a}}^{i = i_0} \frac{\psi(i) di}{\sqrt{\sin^2 i - \frac{z^2}{a^2}}}$$

durch die Formeln 2) oder 3) ist die durchschnittliche Verteilung der Planetoiden im Raume, die natürlich symmetrisch zur Ekliptik ist¹⁾, gegeben. Da wir nun das Häufigkeitsgesetz der Massen als unabhängig von den Bahnelementen annehmen dürfen, so haben wir damit unmittelbar auch das Gesetz für die Dichte der räumlichen Massenbelegung gewonnen. Es sei nämlich M die Gesamtmasse der Planetoiden, ferner ζ der in der Ekliptik um die Sonne herum von einer beliebigen Anfangsrichtung aus gezählte Winkel. Dann ist ein Volumelement gegeben durch:

$$4) \quad a d\zeta da dz,$$

und also die in ihm enthaltene Masse, falls ϱ die räumliche Massendichte:

$$5) \quad m(a, z, \zeta) = a \varrho d\zeta da dz.$$

Dabei ist offenbar

$$6) \quad \varrho = \frac{M}{2\pi a} \varphi'(a) \psi' \left(\frac{z}{a} \right)$$

Das Potential der Gesamtheit dieser Massen ergibt die Störungsfunktion. Sei also ein Aufpunkt durch die Zylinderkoordinaten a_1, ζ_1, z_1 definiert, so ist der strenge Ausdruck der Störungsfunktion:

$$7) \quad V(a_1, \zeta_1, z_1) = \int_{a=0}^{a=\infty} \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \int_{\zeta=0}^{\zeta=2\pi} \frac{a \varrho da dz d\zeta}{\sqrt{(a \cos \zeta - a_1 \cos \zeta_1)^2 + (a \sin \zeta - a_1 \sin \zeta_1)^2 + (z - z_1)^2}}$$

Da nun φ' und ψ' nur empirisch bekannt sind und da V auch als Funktion von ζ nur durch elliptische Parameterintegrale darstellbar ist, so würde die zahlenmäßige Verwertung der strengen Theorie eine dreifache numerische Integration nötig machen und damit einen Aufwand an Rechenarbeit erfordern, der nicht im richtigen Verhältnis zu der immerhin beschränkten Gültigkeit stehen würde, die der Kontinuitätshypothese anhaftet. Ehe wir jedoch die weiteren Vereinfachungen vornehmen können, die uns schließlich zur end-

1) Stets unter Berücksichtigung des in Fußnote²⁾, S. 122, Gesagten.

gültigen repräsentierenden Hypothese führen, müssen wir erst den empirischen Verlauf der Funktionen $\varphi(a)$ und $\psi(i)$, bzw. $\psi' \left(\frac{z}{a} \right)$ näher studieren.

Was zunächst $\varphi(a)$ angeht, so weist diese Kurve, bis in alle Einzelheiten ihres Verlaufes untersucht, bekanntlich jene Diskontinuitäten auf, welche man als Lücken bezeichnet. Diese sind ebensowenig, wie die früher erwähnten Ungleichmäßigkeiten in der Verteilung der Exzentrizitäten und Perihellängen, als das Spiel eines bloßen Zufalls anzusehen oder kosmogonetisch zu deuten, sondern auf die Wirkung der Störungen der großen Planeten zurückzuführen. Für unsere Untersuchung haben indes die Lücken nur untergeordnete Bedeutung, einmal, weil ihnen ja tatsächlich Diskontinuitäten der räumlichen Verteilung, wegen der in Wahrheit von 0 verschiedenen Exzentrizitäten, nicht entsprechen, und andererseits, weil wir ja ohnehin nur die typischen Verhältnisse bei der Konstruktion der repräsentierenden Hypothese berücksichtigen können. Die größeren Unregelmäßigkeiten von $\varphi(a)$ gleicht man schon dadurch ab, daß man das Intervall für die Abzählung verhältnismäßig groß nimmt; die dann noch verbleibenden Unregelmäßigkeiten werden dann graphisch ausgeglichen. Der tatsächliche Verlauf der $\psi(i)$ -Kurve ist ziemlich glatt, so daß wir direkt die durch Abzählung gewonnenen Werte von $\psi(i)$ zu der numerischen Integration, durch die wir zu $\psi' \left(\frac{z}{a} \right)$ gelangen, benutzen können. Ich entnehme zunächst Herrn BAUSCHINGERS Zusammenstellung¹⁾ die Werte für $\varphi(a)$ und stelle sie in der folgenden Tabelle zusammen:

8)	a_0	a_1	$\xi = \int_{a_0}^{a_1} \varphi(a) da$	ξ'
	0	2.1	0.008	0.007
	2.1	2.3	0.066	0.059
	2.3	2.5	0.158	0.134
	2.5	2.7	0.189	0.197
	2.7	2.9	0.250	0.227
	2.9	3.1	0.135	0.200
	3.1	3.3	0.154	0.125
	3.3	3.5	0.027	0.046
	3.5	∞	0.013	0.005

Die Bedeutung der drei ersten Kolonnen ist aus den Überschriften ersichtlich; die in der mit ξ' überschriebenen Kolonnen stehenden Zahlen sind die nach Maßgabe der in Fig. 3 (siehe Tafel III) gegebenen Kurve ausgeglichenen Werte von ξ . Von den beiden folgenden Tabellen gibt die erste ebenfalls

¹⁾ BAUSCHINGER, Tabellen usw., S. 7.

nach BAUSCHINGER („Tabellen“ S. 4) $\psi(i)$, die zweite die daraus mit Hilfe von 3') berechnete Funktion $\psi' \left(\frac{z}{a} \right)$:

9)	i_0	i_1	$\int_{i_0}^{i_1} \psi(i) di$	10)	$\frac{z_0}{a}$	$\frac{z_1}{a}$	$\int_{z_0}^{z_1} \psi' \left(\frac{z}{a} \right) dz$
	0.0	0.9	0.013		0.000	0.017	0.132
	1.0	1.9	0.052		0.017	0.034	0.134
	2.0	2.9	0.080		0.034	0.052	0.130
	3.0	3.9	0.088		0.052	0.070	0.125
	4.0	4.9	0.068		0.070	0.087	0.117
	5.0	5.9	0.086		0.087	0.105	0.100
	6.0	6.9	0.086		0.105	0.122	0.073
	7.0	7.9	0.073		0.122	0.140	0.052
	8.0	8.9	0.059		0.140	0.157	0.038
	9.0	9.9	0.059		0.157	0.175	0.027
	10.0	10.9	0.059		0.175	0.192	0.019
	11.0	11.9	0.048		0.192	0.210	0.013
	12.0	12.9	0.046		0.210	0.227	0.011
	13.0	13.9	0.027		0.227	0.245	0.006
	14.0	14.9	0.027		0.245	0.263	0.006
	15.0	15.9	0.025		0.263	0.281	0.004
	16.0	16.9	0.015		0.281	0.299	0.002
	17.0	17.9	0.004		0.299	0.317	0.000
	18.0	18.9	0.019		0.317	0.334	0.002
	19.0	19.9	0.008		0.334	0.352	0.002
	20.0	20.9	0.013		0.352	0.371	0.002
	21.0	21.9	0.008		0.371	0.389	0.002
	22.0	22.9	0.008		0.389	0.407	0.002
	23.0	23.9	0.015		0.407	0.425	0.000
	24.0	24.9	0.004		0.425	0.444	0.000
	25.0	25.9	0.006				
	26.0	26.9	0.004				
	27.0	27.9	0.002				

ψ' ist, wie wir uns erinnern, das Gesetz der Dichtigkeitsverteilung auf der zur Ekliptik senkrechten Zylinderschale mit dem Radius a ; diese Verteilung ist also eine Funktion von $\frac{z}{a}$ als einfache Folge der grundlegenden Voraussetzung, daß $\psi(i)$ nur Funktion von i , aber nicht von den anderen Elementen ist. Der Verlauf von ψ' , wie ihn Fig. 4 (siehe Tafel II) anschaulich zeigt, gibt nun Veranlassung zu einer weiteren Vereinfachung. Wie man sieht, fällt die Funktion nach einem stark ausgeprägten Maximum in der Ekliptik mit wach-

sendem z schnell ab. Wir werden daher, solange wir uns nur auf die Untersuchung ekliptiknaher Bewegungen und der Störungen der 4 die Bahnform und -dimension bestimmenden Elemente beschränken, statt der variablen Dichte auf dem Zylinder eine zwischen $z = 0$ und dem Maximalwerte $z = az_0$ konstante substituieren können, ohne bei geeigneter Wahl von z_0 einen Fehler zu begehen, der größer ist, als die infolge der Idealisierung des Problems ohnehin unvermeidliche Unsicherheit. Die Wahl von z_0 ist durch den Verlauf von ψ' in ziemlich enge Grenzen eingeschlossen und im übrigen für die numerischen Resultate von keiner allzu großen Tragweite. Nur darauf ist zu achten, daß es nicht so klein gewählt werden darf, daß die Dichte in der Ekliptik größer ausfällt, als im unreduzierten Problem. Das hätte nämlich die Wirkung, daß das Potential und seine Ableitungen sicher sich absolut größer ergeben, als in Wahrheit. Von der repräsentierenden Hypothese ist aber zu fordern, daß sie die tatsächlichen Störungen natürlich allgemein möglichst gut darstellt, speziell aber jedenfalls keine größeren Werte ergibt, als die wahren; denn wir müssen doch prinzipiell die vorliegende Untersuchung auf das Ziel hinführen, eine obere Grenze für die zulässige Planetoidengesamtmasse anzugeben. Wir nehmen $z_0 = 0.175$ an, d. h. ersetzen die ψ' -Kurve durch den in Fig. 4 rot gezeichneten gebrochenen Linienzug, dann wird die Dichte in der Ekliptik etwa 0.95 von der unreduzierten Hypothese.

Wir gelangen nach dem Vorangegangenen also zu folgender endgültiger repräsentierender Hypothese: Die Störungsfunktion ist das Potential einer kontinuierlichen räumlichen Massenverteilung, welche in zur Ekliptik senkrechten Zylinderschalen konstanter Dichte und dem Zylinderradius proportionaler Höhe ($0.175 a$) angeordnet ist. Die räumliche Dichte im Abstände a' vom Zylinderzentrum, d. h. der Sonne, ist gegeben durch:

11)
$$V(r) = \frac{k^2}{\pi} M \int_{a'=0}^{a'=\infty} \int_{\zeta=0}^{\zeta=\pi} \frac{\varphi(a')}{z_0 a'} \ln \left\{ \frac{a' z_0 + \sqrt{a'^2 + r^2 - 2 a' r \cos \zeta + a'^2 z_0^2}}{\sqrt{a'^2 + r^2 - 2 a' r \cos \zeta}} \right\} da' d\zeta.$$

Von den derivierten von V brauchen wir weiterhin die folgenden:

12)
$$\frac{\partial V(r)}{\partial r} = \frac{k^2}{\pi} M \int_{a'=0}^{a'=\infty} \int_{\zeta=0}^{\zeta=\pi} \frac{\varphi(a') (r - a' \cos \zeta) da' d\zeta}{(a'^2 + r^2 - 2 a' r \cos \zeta)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{a'^2 z_0^2}{a'^2 + r^2 - 2 a' r \cos \zeta}}}$$

und $\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2}$. Dieses darf, da es sich um eine kontinuierliche räumliche Massenverteilung handelt, nur durch Differentiation nach erfolgter Integration, also in diesem Falle, wo es sich um numerische oder graphische Integration handelt, auch nur nachträglich aus $\frac{\partial V(r)}{\partial r}$ durch numerische oder graphische Differentiation gebildet werden.

M ist, entsprechend der früheren Definition, die Gesamtmasse des Planetoidenringes. Von den Wirkungen, welche diese Störungsfunktion hervorbringt, untersuchen wir, wie früher schon gesagt, nur diejenigen der eigentlichen vier Bahnelemente. Ich komme auf die Motivierung dieser Beschränkung im letzten Abschnitt dieses Kapitels noch einmal zurück. Hier sei nur darauf hingewiesen, daß die Störungen der Bahnlagenelemente, Neigung und Knoten, sehr empfindlich gegen Änderungen der Dichte als Funktion von z sind, so daß es sehr zweifelhaft ist, ob für diese Elemente unsere repräsentierende Hypothese ausreichen würde. Die Störungen der vier Elemente a , e , $\tilde{\omega}$, M , wo die Bezeichnungen die üblichen sind, sind durch folgende vier Differentialgleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}
 13) \quad \frac{da}{dt} &= \frac{z}{na} \frac{\partial V}{\partial M} \\
 \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial V}{\partial e} \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial V}{\partial \tilde{\omega}} - \sqrt{1-e^2} \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial V}{\partial M} \\
 \frac{dM}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial V}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial V}{\partial e} - \frac{3}{a^2} \int \frac{\partial V}{\partial M} dt.
 \end{aligned}$$

Was jetzt die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunktion angeht, so ist aus Symmetriegründen klar, daß $\tilde{\omega}$ nur durch M in die Störungsfunktion hineinkommen, explizite dagegen nicht in ihr vorkommen kann. Daher ist:

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\omega}} = - \frac{\partial V}{\partial M}$$

Wir wollen nun die Störungsfunktion V als Funktion der Elemente ausdrücken. Wir können zunächst setzen:

$$14) \quad r = a (1 + \eta [e, M]).$$

Hier ist, wie durch die Schreibweise schon angedeutet, η eine Funktion von e und M , die übrigens mit e verschwindet und daher, da wir uns durchaus auf kleine Exzentrizitäten beschränken wollen, als kleine Größe angesehen werden kann, deren dritte Potenz wir in der Entwicklung vernachlässigen wollen. Es ist also:

$$15) \quad V(r) = V(a + a\eta) = V(a) + a\eta \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)_{r=a} + \frac{1}{2} a^2 \eta^2 \left(\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} \right)_{r=a}$$

Die in den Differentialgleichungen 14) vorkommende Ableitung nach a bildet man besser folgendermaßen:

$$16) \quad \frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial r} (1 + \eta).$$

Weiter:

$$17) \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V(a + a \eta)}{\partial r} = \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} + a \eta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r=a}$$

Nun ist, falls wir uns nur auf die niedrigsten Potenzen von e beschränken¹⁾:

$$18) \quad \eta = -e \cos M + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} \cos 2M, \quad \text{also}$$

$$19) \quad \eta^2 = \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2} \cos 2M.$$

Daraus ergibt sich die Störungsfunktion:

$$20) \quad V(r) = V(a) - a \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} e \cos M + \left(a \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r=a} \right) \frac{e^2}{2} \\ - \left(a \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r=a} \right) \frac{e^2}{2} \cos 2M.$$

Mithin die für 14) erforderlichen partiellen Derivierten:

$$21) \quad \frac{\partial V}{\partial e} = -a \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} \cos M + \left(a \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r=a} \right) e \\ - \left(a \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r=a} \right) e \cos 2M$$

$$\frac{\partial V}{\partial M} = -\frac{\partial V}{\partial \omega} = a \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} e \sin M + \\ \left(a \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r=a} \right) e^2 \sin 2M$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} - \left(\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} + a \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r=a} \right) e \cos M + \\ \left(\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} + a \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r=a} \right) \frac{e^2}{2} - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} \frac{e^2}{2} \cos 2M.$$

1) TISSERAND, Traité de mécanique céleste I, pag. 245.

Tragen wir dieses in die Differentialgleichungen 14) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 22) \quad \frac{da}{dt} &= A_1 e \sin M; \\
 \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= \frac{\Pi_1}{e} \cos M + \Pi_2 + \Pi_3 \cos 2M \\
 \frac{de}{dt} &= E_1 \sin M \\
 \frac{dM}{dt} &= \frac{M_1}{e} \cos M + M_2 + M_3 \cos 2M.
 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
 23) \quad A_1 &= \frac{2}{n} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a}; \\
 \Pi_1 &= - \frac{1}{n \cdot a} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a}; \\
 \Pi_2 &= \frac{1}{n \cdot a} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} + \frac{a}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r=a} \right); \\
 \Pi_3 &= - \frac{1}{n \cdot a} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} - \frac{a}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r=a} \right); \\
 E_1 &= \frac{1}{n \cdot a} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a}; \\
 M_1 &= \frac{1}{n \cdot a} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a}; \\
 M_2 &= - \frac{1}{n \cdot a} \left(3 \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} + \frac{a}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r=a} \right); \\
 M_3 &= \frac{1}{n \cdot a} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} - \frac{a}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r=a} \right).
 \end{aligned}$$

Dabei sind alle Glieder, die kleiner als von der Ordnung e werden, weggelassen. Die Integration der 22) gibt nun:

$$\begin{aligned}
 24) \quad \triangle a &= - \frac{A_1}{n} e \cos M && \text{oder} \\
 \triangle \log a &= - \frac{A_1}{a \cdot n} \log E e \cos M \\
 \triangle \tilde{\omega} &= \frac{\Pi_1}{e \cdot n} \sin M + \Pi_2 t + \frac{\Pi_3}{2 \cdot n} \sin 2M \\
 \triangle e &= - \frac{E_1}{n} \cos M \\
 \triangle M &= \frac{M_1}{e \cdot n} \sin M + M_2 t + \frac{M_3}{2 \cdot n} \sin 2M.
 \end{aligned}$$

Hier ist E die Basis der natürlichen Logarithmen.

Die $A_1 \dots$ usw. sind Größen, die, abgesehen von den Konstanten der repräsentierenden Hypothese, lediglich von der mittleren Entfernung des betreffenden Planeten abhängen. Bezüglich der beiden Integrationsvariablen a' und ζ verhalten sich nun die Koeffizienten A_1 usw. insofern verschieden, als die Abhängigkeit des Integranden von ζ analytisch, die von a' dagegen nur empirisch gegeben ist; als Funktion von ζ betrachtet ist $\frac{\partial V(r)}{\partial r}$ ein elliptisches

Integral dritter Gattung. Das ist für die numerische Weiterbehandlung der Frage unbequem, da man dadurch auf die weitgehenden Hilfsmittel, welche für die numerische Berechnung der Integrale 1. und 2. Gattung vorhanden sind, verzichten muß. Es ist jedoch unerlässlich, diese Integration streng durchzuführen, da der für die weitere numerische Untersuchung so wichtige Differentialquotient $\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2}$ nur durch graphische Differentiation von $\frac{\partial V(r)}{\partial r}$ erhalten werden kann;

man muß daher unbedingt die Kurve $\frac{\partial V(r)}{\partial r}$ selbst mit größter bei der Natur des Problems noch lohnender Schärfe berechnen; jedenfalls darf, soweit die Rechnung streng durchführbar ist, kein Fehler entstehen, der gegenüber der unvermeidlichen Unsicherheit, wie sie durch die empirischen Häufigkeitskurven eingeführt wird, ins Gewicht fällt. Es müssen, wie ich also noch einmal betonen möchte, beide Integrationen numerisch durchgeführt werden, sowohl die über ζ , von dem der Integrand in analytisch wohl definierter Weise, als auch über a' , von dem er nur in empirisch bestimmbarer Form abhängt. Um diese Operation einer doppelten numerischen Integration zu vereinfachen, will ich zunächst die Koeffizienten in 24) noch etwas transformieren. Dazu soll zunächst $\frac{\partial V(r)}{\partial r}$ eine andere analytische Form, als 12), erhalten. ζ war dort

der von der Sonne aus gezählte Winkel. Wir wollen nun unterscheiden zwischen dem Anteil von $\frac{\partial V(r)}{\partial r}$, welchen die innerhalb, und dem, welchen die außerhalb des Aufpunktes gelegenen Zylinderschalen ergeben. Der erstere Anteil sei mit $\left[\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right]_a$, der zweite mit $\left[\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right]_i$ bezeichnet. Wir führen nun statt der einheitlichen Integrationsvariablen ζ je eine neue, für die beiden unterschiedenen Fälle verschiedene, Variable ein. Nämlich in $\left[\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right]_a$ den Winkel φ gerechnet um den Spiegelpunkt des Aufpunktes in bezug auf den Kreis mit dem Radius a' , und in $\left[\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right]_i$ den Winkel φ' um den Aufpunkt selbst herum ein. Es vereinfacht sich durch diese Substitutionen das Integral 12) in der folgenden für die numerische Rechnung höchst wesentlichen Weise:

$$25) \left[\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right]_a = -\frac{1}{\pi} k^2 M \int_{a'=0}^{a'=r} \varphi(a') da' \frac{1}{r^2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta'^2 + \alpha^2 z_0^2}}$$

$$25a) = -k^2 M \int_{a'=0}^{a'=r} \varphi(a') da' \frac{F_a(\alpha)}{r^2}$$

wo also

$$26) \left\{ \begin{array}{l} F_a(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta'^2 + \alpha^2 z_0^2}} \\ \alpha = \frac{a'}{r} \\ \Delta' = \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi} - \alpha \cos \varphi \end{array} \right. \quad \text{und}$$

ist. Weiter ergibt sich

$$27) \left[\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right]_i = \frac{1}{\pi} k^2 M \int_{a'=r}^{a'=\infty} \frac{\varphi(a')}{a'^2} da' \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{\sqrt{(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi') (\Delta'^2 + z_0^2)}}$$

$$27a) = k^2 M \int_{a'=r}^{a'=\infty} \varphi(a') da' \frac{F_i(\alpha)}{a'^2}$$

wo also

$$28) \left\{ \begin{array}{l} F_i(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{\sqrt{(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi') (\Delta'^2 + z_0^2)}} \\ \alpha = \frac{r}{a'} \\ \Delta' = \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi'} - \alpha \cos \varphi'. \end{array} \right.$$

Man kann nunmehr zusammenfassend schreiben:

$$29) \frac{\partial V(r)}{\partial r} = \left[\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right]_a + \left[\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right]_i = -k^2 M A(r), \quad \text{wo}$$

$$30) \quad A(r) = \int_{a'=0}^{a'=r} \varphi(a') \, da' \frac{F_a(\alpha)}{r^2} - \int_{a'=r}^{a'=\infty} \varphi(a') \, da' \frac{F_i(\alpha)}{a'^2}$$

Weiter kann man endlich schreiben:

$$31) \quad \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} = -k^2 M \frac{d A(r)}{d r} ,$$

wo nunmehr $\frac{d A(r)}{d r}$ aus $A(r)$ durch graphische Differentiation zu bilden ist.

Nach diesen Transformationen kann man nun endlich auch den Störungen der Elemente noch die einfache Form geben:

$$\begin{aligned} 32) \quad \triangle \log a &= 2 \log E M (I) e \cos M \\ \triangle \tilde{\omega} &= M (I) \frac{1}{e} \sin M + n M (II) t + M (III) \sin 2 M \\ \triangle e &= M (I) \cos M \\ \triangle M &= - M (I) \frac{1}{e} \sin M + n M (IV) t - M (III) \sin 2 M. \end{aligned}$$

Hier ist:

$$\begin{aligned} 33) \quad (I) &= a^2 A(a) \\ (II) &= -a^2 \left(A(a) + \frac{a}{2} \left(\frac{d A(r)}{d r} \right)_{r=a} \right) \\ (III) &= \frac{1}{2} a^2 \left(A(a) - \frac{a}{2} \left(\frac{d A(r)}{d r} \right)_{r=a} \right) \\ (IV) &= a^2 \left(3 A(a) + \frac{a}{2} \left(\frac{d A(r)}{d r} \right)_{r=a} \right) \end{aligned}$$

Wir können nunmehr dazu übergehen, die beiden numerischen Integrationen auszuführen. Und zwar zunächst die nach φ bzw. φ' , in welchen der Integrand in bestimmt definierter analytischer Form gegeben ist, welche also für jeden bestimmten Wert des Parameters α mit jeder beliebigen Genauigkeit ausführbar ist. Es handelt sich zunächst um die Berechnung von $F_a(\alpha)$ und $F_i(\alpha)$. Um diese zu bewirken, habe ich die Größe $\triangle'$, und dann weiter die Integrandenfunktionen selbst, für alle α zwischen 1 und 0.4 von 0.05 zu 0.05 vorwärts gehend und von 15° zu 15° zwischen 0 u π tabuliert:

34) Δ'

$\varphi(\varphi')$ α	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5176	1.0000	1.4142	1.7320	1.9318	2.0000
0.95	0500	0517	0573	0690	0935	1516	3122	6434	0435	4126	7027	8869	1.9500
0.9	1000	1032	1136	1350	1765	2614	4359	7272	0765	4078	6724	8418	9000
0.85	1500	1545	1691	1982	2518	3509	5268	7909	1018	4002	6413	7965	8500
0.8	2000	2056	2237	2589	3211	4277	6000	8417	1211	3903	6093	7510	8000
0.75	2500	2566	2775	3175	3853	4953	6614	8835	1353	3781	5765	7054	7500
0.7	3000	3074	3306	3739	4453	5555	7141	9179	1453	3639	5430	6596	7000
0.65	3500	3580	3828	4285	5015	6101	7600	9465	1515	3477	5086	6136	6500
0.6	4000	4084	4343	4812	5544	6596	8000	9702	1544	3298	4735	5674	6000
0.55	4500	4583	4852	5324	6043	7049	8352	9895	1543	3102	4378	5210	5500
0.5	5000	5086	5352	5818	6514	7463	8660	1.0051	1514	2890	4012	4746	5000
0.45	5500	5585	5846	6298	6959	7841	8930	0171	1459	2662	3641	4279	4500
0.4	6000	5583	6334	6764	7381	8188	9165	0258	1381	2420	3262	3811	4000

Für das Weitere lasse ich den Kopf des Schemas weg.

35) 1

	$\sqrt{\Delta'^2 + \alpha^2 z_0^2}$												
5.707	5.707	5.707	5.707	5.707	5.707	5.707	1.834	0.985	0.702	0.574	0.516	0.498	
5.760	5.743	5.686	5.555	5.242	4.444	2.827	1.505	946	708	585	528	511	
5.361	5.310	5.149	4.821	4.227	3.277	2.158	1.344	919	706	595	541	525	
4.733	4.663	4.440	4.035	3.419	2.624	1.827	1.243	899	710	607	555	539	
4.096	4.020	3.789	3.397	2.855	2.222	1.623	1.171	885	716	619	569	554	
3.542	3.470	3.257	2.911	2.457	1.956	1.483	1.120	875	722	632	585	570	
3.086	3.024	2.836	2.541	2.165	1.758	1.380	1.080	868	730	646	601	587	
2.717	2.662	2.504	2.258	1.945	1.611	1.301	1.049	864	739	661	618	605	
2.418	2.344	2.238	2.030	1.772	1.497	1.239	1.025	863	750	677	637	624	
2.173	2.134	2.022	1.848	1.634	1.406	1.189	1.006	863	761	694	656	644	
1.968	1.938	1.844	1.700	1.521	1.331	1.149	0.991	866	774	712	677	666	
1.800	1.773	1.695	1.576	1.428	1.269	1.116	980	871	788	732	699	689	
1.655	1.633	1.569	1.471	1.349	1.217	1.088	973	877	804	753	723	713	

36) $\cos \varphi$

	$\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi} (\Delta'^2 + z_0^2)$												
5.707	5.707	5.707	5.707	5.707	5.707	$\pm$ 5.707	-1.834	-0.985	-0.702	-0.574	-0.516	-0.498	
5.495	5.461	5.344	5.074	4.433	2.812	0	-0.977	-831	-671	-575	-526	-511	
4.961	4.889	4.648	4.147	3.211	1.665	0	-700	-732	-646	-577	-537	-524	
4.338	4.242	3.931	3.346	2.409	1.156	0	-560	-662	-627	-580	-549	-538	
3.763	3.657	3.327	2.744	1.896	0.882	0	-474	-611	-612	-584	-561	-553	
3.277	3.170	2.848	2.301	1.554	715	0	-417	-573	-600	-589	-574	-569	
2.879	2.779	2.471	1.971	1.314	603	0	-376	-543	-592	-595	-589	-585	
2.555	2.459	2.175	1.722	1.139	524	0	-345	-519	-586	-603	-604	-603	
2.290	2.201	1.939	1.525	1.007	465	0	-322	-501	-582	-612	-620	-621	
2.071	1.988	1.746	1.370	0.903	421	0	-302	-487	-580	-622	-637	-641	
1.888	1.811	1.588	1.244	822	386	0	-290	-476	-581	-633	-656	-662	
1.733	1.662	1.458	1.141	757	358	0	-278	-468	-584	-647	-676	-685	
1.600	1.534	1.345	1.055	703	335	0	-270	-463	-588	-661	-698	-709	

Die aus den beiden letzten Schemata sich mit φ (φ') als Variabler und α als Parameter ergebenden Kurvenscharen sind nun sorgfältig diagrammatisch dargestellt, und dann ist nach φ integriert worden. Dadurch ergab sich:

37)	α	$F_a(\alpha)$	$F_i(\alpha)$
	1.0	3.496	2.211
	0.95	3.075	1.832
	0.9	2.666	1.461
	0.85	2.305	1.163
	0.8	2.016	0.938
	0.75	1.794	0.766
	0.7	1.622	0.633
	0.65	1.489	0.529
	0.6	1.383	0.446
	0.55	1.302	0.379
	0.5	1.235	0.320
	0.45	1.181	0.271
	0.4	1.137	0.225

Nunmehr sind auch $F_a(\alpha)$ und $F_i(\alpha)$ graphisch mit der größten erreichbaren Genauigkeit dargestellt, um für das Folgende für beliebige α den betreffenden Funktionswert bequem entnehmen zu können. Ich füge diese Diagramme nicht bei, ebensowenig wie die vorigen, weil bei kleinem Maßstabe die Figuren unübersichtlich wären.

Wir wollen nun die zweite numerische Integration, nach a' , durchführen. Ich wähle dafür als Integrationsabschnitte:

$$a' = 2.1 - 2.3, 2.3 - 2.5 \quad . \quad . \quad . \quad 3.3 - 3.5,$$

was bei der ohnehin durch die Natur des Problems bedingten numerischen Unsicherheit genügend genaue Resultate ergeben dürfte, und berechne die Größen (I) — (IV) für die folgenden Werte von a :

$$a = 1.9, 2.1, 2.3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.9, 4.1.$$

Wir stellen jetzt die dafür erforderlichen Größen in einer Reihe von Tabellen zusammen, die stets dieselbe Anordnung haben; ich gebe daher den gemeinsamen Kopf derselben nur bei der ersten an und fülle außerdem immer nur die Stellen aus, die wirklich gebraucht werden.

38)	α											
$a' \backslash a$	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.7	3.9	4.1
2.2	0.864	0.955	0.957	0.880	0.815	0.759	0.710	0.667	0.628	0.595	0.564	0.537
2.4	0.792	0.875	0.958	0.960	0.889	0.828	0.774	0.727	0.686	0.648	0.615	0.585
2.6	0.731	0.808	0.885	0.961	0.963	0.897	0.839	0.788	0.743	0.703	0.667	0.634
2.8	0.678	0.750	0.821	0.893	0.964	0.966	0.903	0.848	0.800	0.757	0.718	0.683
3.0	0.633	0.700	0.768	0.833	0.900	0.967	0.968	0.909	0.857	0.811	0.769	0.732
3.2	0.594	0.657	0.719	0.781	0.844	0.907	0.969	0.970	0.914	0.865	0.821	0.780
3.4	0.559	0.618	0.677	0.735	0.794	0.853	0.912	0.971	0.971	0.919	0.872	0.829

Die weiteren Tabellen folgen dem gleichen Schema:

39)

α^2											
0.746	0.912	0.916	0.774	0.664	0.576	0.504	0.445	0.394	0.354	0.318	0.288
0.626	0.766	0.918	0.922	0.790	0.686	0.599	0.529	0.471	0.420	0.378	0.342
0.534	0.653	0.783	0.924	0.927	0.805	0.704	0.621	0.552	0.494	0.445	0.402
0.460	0.563	0.674	0.797	0.929	0.933	0.815	0.719	0.640	0.573	0.516	0.466
0.401	0.490	0.590	0.694	0.810	0.935	0.937	0.826	0.734	0.658	0.591	0.536
0.353	0.432	0.517	0.610	0.712	0.823	0.939	0.941	0.835	0.748	0.674	0.608
0.312	0.382	0.458	0.540	0.630	0.728	0.832	0.943	0.943	0.845	0.760	0.687

40)

$F_a(\alpha)$ bzw. $F_i(\alpha)$											
1.238	1.859	3.142	2.513	2.095	1.827	1.656	1.533	1.439	1.377	1.325	1.283
0.902	1.301	1.865	3.157	2.580	2.170	1.891	1.712	1.583	1.485	1.412	1.358
0.706	0.967	1.363	1.894	3.184	2.644	2.240	1.957	1.767	1.634	1.530	1.451
0.556	0.765	1.018	1.415	1.926	3.210	2.690	2.288	2.016	1.819	1.683	1.573
0.497	0.633	0.816	1.078	1.461	1.944	3.227	2.739	2.344	2.075	1.870	1.727
0.437	0.544	0.678	0.865	1.135	1.506	1.960	3.233	2.779	2.401	2.128	1.920
0.390	0.475	0.581	0.721	0.915	1.176	1.539	1.978	3.251	2.819	2.455	2.173

41) Dasselbe Schema mit $\varphi(a')$ durchmultipliziert.

0.073	0.110	0.181	0.149	0.124	0.108	0.098	0.091	0.085	0.081	0.078	0.075
121	175	250	423	346	291	253	230	212	199	189	182
139	190	268	373	627	521	442	385	348	322	301	286
126	174	231	321	437	729	611	520	458	413	382	357
100	127	163	215	292	389	645	548	469	415	374	345
057	068	085	108	142	189	245	405	348	300	266	240
018	022	027	033	042	054	071	091	150	130	115	100

42)

$\varphi(a') \frac{F_a(\alpha)}{r^2}$ bzw. $\varphi(a') \frac{F_i(\alpha)}{a'^2}$											
0.0151	0.0226	0.0351	0.0238	0.0170	0.0129	0.0102	0.0084	0.0069	0.0059	0.0051	0.0045
0211	0304	0435	0677	0474	0346	0263	0212	0173	0145	0124	0109
0206	0282	0397	0552	0859	0620	0460	0354	0284	0235	0198	0172
0161	0226	0295	0409	0557	0868	0635	0478	0374	0302	0251	0214
0111	0141	0167	0240	0325	0433	0671	0504	0383	0303	0246	0207
0051	0066	0083	0105	0139	0184	0239	0373	0284	0219	0175	0144
0016	0019	0023	0029	0036	0047	0061	0079	0122	0095	0076	0060

Auf Grund dieser Tabelle ist nun, für die außerhalb und innerhalb liegenden Parteien des Ringes getrennt, die graphische Integration durchzuführen; man erhält $A(r)$. In der folgenden Tabelle stehen in der oberen Zeile die wirklich berechneten Funktionswerte von $A(r)$. Danach ist die Funktion so genau wie möglich graphisch dargestellt (siehe Fig. 5 auf Tafel III).

Dieser Kurve sind dann für die zwischenliegenden Werte von r die Funktionswerte entnommen und in die zweite Zeile gestellt.

43)	$A(r)$							
r	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3
	-0.0910	-0.1264	-0.1059	-0.0420	+0.0445	+0.1299	+0.1828	+0.1922
	-0.1137	-0.1224	-0.0777	-0.0006	+0.0903	+0.1608	+0.1941	
		3.5	3.7	3.9	4.1			
		+0.1688	+0.1359	+0.1120	+0.0952			
	+0.1827	+0.1518	+0.1236	+0.1029				

Daraus durch graphische Differentiation:

44)	$\frac{d A(r)}{d r}$							
r	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3
	-0.1983	-0.0354	+0.2190	+0.3963	+0.4476	+0.3315	+0.1791	-0.0561
	-0.1806	+0.1029	+0.3147	+0.4494	+0.4065	+0.2634	+0.0393	
		3.5	3.7	3.9	4.1			
		-0.1458	-0.1317	-0.0960	-0.0723			
	-0.1122	-0.1554	-0.1122	-0.0843				

Damit wird endlich:

45)	(I)							
a	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3
	-0.337	-0.558	-0.560	-0.263	+0.324	+1.091	+1.757	+2.093
	-0.445	-0.592	-0.448	-0.004	+0.708	+1.447	+1.988	
		3.5	3.7	3.9	4.1			
		+2.068	+1.860	+1.705	+1.601			
	+2.112	+1.967	+1.785	+1.646				

(II)								
a	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3
	+1.017	+0.650	-0.773	-2.833	-4.750	-5.132	-4.425	-1.085
	+1.178	+0.045	-1.725	-3.945	-5.104	-5.000	-2.633	
		3.5	3.7	3.9	4.1			
		+1.058	+1.474	+1.150	+0.893			
	+0.094	+1.650	+1.290	+1.011				

2. (III)

a	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3
	+0.343	-0.464	-1.893	-3.358	-4.102	-2.952	-0.908	+3.104
	+0.269	-1.140	-2.623	-3.953	-3.688	-2.106	+1.350	
		3.5	3.7	3.9	4.1			
		+5.197	+5.195	+4.554	4.090			
	+4.318	+5.585	+4.861	4.344				

(IV)

a	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3
	-1.687	-1.764	-0.348	+2.308	+5.397	+7.312	+7.943	+5.273
	-2.088	-0.1230	+0.833	+3.936	+6.520	+7.895	+6.608	
		3.5	3.7	3.9	4.1			
		+3.080	+2.247	+2.263	+2.305			
	+4.130	+2.284	+2.237	+2.242.				

Ich habe auch die Funktionen (I) bis (IV) graphisch dargestellt und in Fig. 6 auf der besonderen Doppeltafel IV—V beigelegt.

Wir bemerken allgemein zu diesen Zahlen das Folgende: (I) stellt bis auf einen Faktor den Verlauf der von der Sonne weg gerichteten Kraft beim Durchgange durch den Planetoidenring dar. An derjenigen Stelle, wo die Kraft null wird, erleidet ein kleiner Planet, der sich in einer Kreisbahn bewegt, überhaupt keine Störungen. Man sieht in der Tat, daß für diesen Fall die Störungen in a und e verschwinden, da $(I) = 0$. Ferner sind stets die periodischen Störungen von M und ω , für $(I) = 0$ auch die säkularen Störungen entgegengesetzt gleich, denn für $(I) = 0$ wird $(II) = -(IV)$. Auch für jede andere mittlere Bewegung ist natürlich im gestörten Problem eine Kreisbahn möglich, doch ist für diese der Zusammenhang zwischen mittlerer Bewegung und mittlerer Entfernung nicht mehr streng durch das dritte KEPLERSche Gesetz gegeben. Die angegebenen Zahlen lehren weiterhin, daß die periodischen Störungen, selbst für den HARZERSchen Wert von M nirgends den Wert von 0.75 im geozentrischen Ort übersteigen können. Wir werden sie also beim Vergleich mit den Beobachtungen gänzlich aus dem Spiele lassen. Anders liegt es mit den Säkularstörungen. Diese würden allerdings selbst bei mäßigen Exzentrizitäten, für welche unsere Betrachtungen überhaupt gelten, mit der HARZERSchen Masse im Laufe von etwa rund einem halben Jahrhundert schon merkliche Störungen im geozentrischen Ort hervorrufen. Um das schnell zu übersehen, tabuliere ich zunächst einmal mit der HARZERSchen Masse die jährlichen Säkularstörungen in Perihellänge, die uns nachher ausschließlich beschäftigen

werden. Es ist dies auch lehrreich durch den Vergleich mit den aus der WILKENSSchen Hypothese entspringenden Zahlen, die ich daruntersetze¹⁾:

46)	$ \Delta \tilde{\omega}_j = n \text{ (II) } M [M = 0.5 \times 10^{-6}]$							
a	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3
	+0".251	+0".138	-0".144	-0".464	-0".694	-0".672	-0".527	-0".118
	+0".270	+0".009	-0".301	-0".611	-0".704	-0".625	-0".297	
		3.5	3.7	3.9	4.1			
		+0".105	+0".134	+0".097	+0".070			
	+0".010	+0".157	+0".113	+0".082				

	$ \Delta \tilde{\omega}_j \text{ (WILKENS)}$								
a	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5
	+0".25	+0".49	+1".15	+5".75	+\infty	+7".60	+2".32	+1".26	+0".87.

Auch $|\Delta \tilde{\omega}_j|$ ist in Fig. 6 graphisch dargestellt. Wie man sieht, gibt für die überwiegende Zahl der kleinen Planeten, jedenfalls für alle, bei denen $a > 1.9$ ist, die WILKENSSche Theorie nicht nur absolut genommen viel zu große Störungen, sondern meistens auch ein falsches Vorzeichen. Vor allem aber sieht man, daß selbst die Voraussetzung einer bereits im 2. Kapitel als unmöglich groß erwiesenen Gesamtmasse die jährlichen Säkularstörungen in $\tilde{\omega}$ in maximo nur etwa $-0".7$ betragen an der Stelle, wo die HARZER-WILKENSSche repräsentierende Hypothese ∞ große positive Störungen ergäbe.

IV.

Zur Prüfung der Theorie an der Beobachtung haben wir nun zunächst die Wirkung der gefundenen Störungen auf den geozentrischen Ort zu untersuchen. Wir dürfen dabei sämtliche periodischen Störungen, die der Planetoidenring hervorbringt, wegen ihrer Kleinheit vernachlässigen; lediglich die Säkularstörungen könnten für die länger bekannten kleinen Planeten eine genügende Größe erreicht haben, um aus langen zusammenhängenden Beobachtungsreihen bestimmt nachgewiesen werden zu können. Säkularstörungen erleiden innerhalb der hier innegehaltenen Genauigkeitsgrenze die Elemente $\tilde{\omega}$

¹⁾ Zu der Tabelle von Herrn WILKENS (Astr. Nachr. 4063) ist zu bemerken, daß für die Werte $a < \text{Ringradius}$ in den Säkularstörungen von $\Delta \tilde{\omega}$ das Vorzeichen zu vertauschen ist; für $a > \text{Ringradius}$ sind die angegebenen Zahlen, wohl durch ein Versehen, irrtümlich, die obige Rechnung ist natürlich mit den richtigen Werten geführt.

und M und damit im allgemeinen auch die mittlere Länge $L = M + \tilde{\omega}$. Bezüglich der letzteren ist aber das Folgende zu bemerken. Die Figur 5 zeigt, daß dort, wo die Absolutwerte der Störungen am größten sind, diejenigen in M und $\tilde{\omega}$ genähert entgegengesetzt gleich sind; für die Stelle, wo $\frac{dV(r)}{dr} = 0$ ist, ist das streng erfüllt; hier sind also, wie schon hervorgehoben wurde, die Säkularstörungen in L streng gleich 0. Aber auch sonst sind sie innerhalb der dichteren Partien des Ringes erheblich kleiner als die Störungen von M und $\tilde{\omega}$ selbst. Aus Beobachtungen sind nun aber Säkularstörungen der mittleren Länge direkt selbstverständlich nicht nachzuweisen, da ja eben die mittlere Bewegung so bestimmt wird, daß in den wahren Längen kein der Zeit proportionales Glied mehr auftritt. Wenn wir daher für den Vergleich mit den Beobachtungen die Säkularstörungen von L streng gleich 0 annehmen, so bewirkt diese Vernachlässigung weiter nichts, als daß wir im geozentrischen Ort eine periodische Störung vernachlässigen, die genau von derselben Größenordnung ist, wie die mit $\triangle a$ ohnehin vernachlässigten periodischen Störungen. Wir setzen also für die Folge streng: $\triangle M = -\triangle \tilde{\omega}$.

Sei nun für $L = 0 : t = 0$, $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0$; die mittlere Bewegung sei μ , die Mittelpunktsungleichung werde vorübergehend mit $C(M)$ bezeichnet; sei endlich M_0 die ungestörte mittlere und v die von der festen Apsidenlinie für $t = 0$ gerechnete wahre Anomalie. Dann ist:

$$1) v = M + \triangle \tilde{\omega} \cdot t + C(M) = M_0 + C(M_0 - \triangle \tilde{\omega} \cdot t).$$

Entwickelt man jetzt die Mittelpunktsungleichung nach $\triangle \tilde{\omega} \cdot t$, so ergibt sich, wenn man in dem mit $\triangle \tilde{\omega} \cdot t$ multiplizierten Teil nur das größte Glied beibehält,

$$2) v = \mu t - \tilde{\omega}_0 + C(\mu t - \tilde{\omega}_0) - 2e \triangle \tilde{\omega} \cdot t \cos(\mu t - \tilde{\omega}_0) = v_0 + \delta v,$$

falls man setzt:

$$2a) \delta v = -2e \triangle \tilde{\omega} \cdot t \cos(\mu t - \tilde{\omega}_0).$$

Schreibt man jetzt in gleichem Sinne:

$$3) r = r + \delta r,$$

so ist

$$3a) r_0 = a (1 - e \cos(\mu t - \tilde{\omega}_0)) \\ \delta r = -a \cdot e \cdot \triangle \tilde{\omega} \cdot t \sin(\mu t - \tilde{\omega}_0).$$

Es mögen jetzt, der üblichen Bezeichnung entsprechend, x, y, z die heliozentrischen Koordinaten, a', b', c', A, B, C die GAUSSSchen Parameter bedeuten, so ist:

$$4) \begin{aligned} x &= x_0 + \delta x = r_0 \sin a' \sin(A + v_0) + \delta r \sin a' \sin(A + v_0) \\ &\quad - \delta v \sin a' \cos(A + v_0) \\ y &= y_0 + \delta y = r_0 \sin b' \sin(B + v_0) + \delta r \sin b' \sin(B + v_0) \\ &\quad - \delta v \sin b' \cos(B + v_0) \\ z &= z_0 + \delta z = r_0 \sin c' \sin(C + v_0) + \delta r \sin c' \sin(C + v_0) \\ &\quad - \delta v \sin c' \cos C + v_0 \end{aligned}$$

oder auch unter Heranziehung von 2a) und 3a):

$$\begin{aligned}
 5) \quad \delta x &= \Delta \tilde{\omega} \cdot t [2 e \sin a' \sin (A + v_0) \cos (\mu t - \tilde{\omega}_0) \\
 &\quad + a e \sin a' \cos (A + v_0) \sin (\mu t - \tilde{\omega}_0)] \\
 \delta y &= \Delta \tilde{\omega} \cdot t [2 e \sin b' \sin (B + v_0) \cos (\mu t - \tilde{\omega}_0) \\
 &\quad + a e \sin b' \cos (B + v_0) \sin (\mu t - \tilde{\omega}_0)] \\
 \delta z &= \Delta \tilde{\omega} \cdot t [2 e \sin c' \sin (C + v_0) \cos (\mu t - \tilde{\omega}_0) \\
 &\quad + a e \sin c' \cos (C + v_0) \sin (\mu t - \tilde{\omega}_0)].
 \end{aligned}$$

Sind endlich α_0, δ_0, D_0 ungestörte geozentrische Rektaszension, Deklination und Entfernung, $\alpha_0 + \delta\alpha, \delta_0 + \delta\delta$ die entsprechenden gestörten Koordinaten, so ist:

$$\begin{aligned}
 6) \quad \delta\alpha &= - \frac{\delta x \sin \alpha_0 - \delta y \cos \alpha_0}{D_0 \cos \delta_0} \\
 \delta\delta &= - \frac{\delta x \cos \alpha_0 \sin \delta_0 + \delta y \sin \alpha_0 \sin \delta_0 - \delta z \cos \delta_0}{D_0}
 \end{aligned}$$

Wir fügen zu diesen Formeln noch einige Bemerkungen hinzu, die übrigens zum Teil sich auf bereits früher Gesagtes beziehen. Wir haben bisher die Störungen der Bahnlagenelemente gänzlich aus unserer Betrachtung herausgelassen. Es ist aber nicht etwa die geringe zu erwartende Größe, welche uns dazu berechtigt; im Gegenteil wird man aus allgemeinen Überlegungen heraus sowohl für die periodischen, wie für die säkularen Störungen von Neigung und Knotenlänge dieselben Größenordnungen zu erwarten haben, wie für Exzentrizitäten und Perihellängen. Wir sind aber vorläufig nicht in der Lage, eine auch für diese Fälle mit Sicherheit ausreichende repräsentierende Hypothese anzugeben. Während es nämlich für die Störungen der vier Elemente $a, e, \tilde{\omega}, M$ in erster Linie auf die Kenntnis der Verteilung der Planetoiden nach den mittleren Entfernungen ankommt, hängen die Störungen der Bahnlage vorwiegend von der Verteilung gemäß der Koordinate z ab. In bezug auf diese ist aber unsere repräsentierende Hypothese ziemlich roh, so daß es bedenklich erscheint, daraus numerische Schlüsse zu ziehen. Denn abgesehen davon, daß wir die empirische $\psi' \left(\frac{z}{a} \right)$ -Kurve durch den gebrochenen Linien-

zug ersetzt haben, sind auch die Grundvoraussetzungen zum Teil, in aller Strenge genommen, unrichtig. Das gilt z. B. für die Annahme der Ekliptik als Symmetrieebene für die durchschnittliche räumliche Verteilung der kleinen Planeten. Aus theoretischen Gründen wäre nämlich infolge der Säkularestörungen der großen Planeten als Symmetrieebene eine nahe mit der „unveränderlichen“ zusammenfallende Ebene zu erwarten¹⁾. Wie weit die Tatsachen mit dieser Folgerung im Einklang stehen, ist vorläufig nicht mit aller Sicherheit zu sagen, da bisher die NEWCOMBSchen Untersuchungen auf Grund des heutigen außerordentlich viel reicheren Materials noch nicht wiederholt

¹⁾ NEWCOMB, Astr. Nachr. 1382.

worden sind. Gewisse provisorische Ergebnisse scheinen aber darauf hinzuweisen, daß die große Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung, die bei Exzentrizitäten und Perihellängen zu Tage tritt, bei Knotenlängen und Neigungen nicht statt hat. Wäre das nämlich der Fall, so müßten die auf die unveränderliche Ebene bezogenen Knotenlängen nahezu gleichmäßig auf den ganzen Umkreis verteilt sein. Die Abzählung, die man nach der PSILANDERschen Zusammenstellung¹⁾ vornehmen kann, bestätigt dies jedoch nicht, es scheinen vielmehr zwei ausgeprägte Häufungsstellen vorhanden zu sein. Auch der schon länger zurückliegende Versuch SVEDSTRUPS²⁾, einen „mittleren“ kleinen Planeten zu berechnen, spricht, mag man auch sonst dem Versuch keine Bedeutung für die Kosmogonie der kleinen Planeten mehr beilegen, entschieden gegen die Übereinstimmung von Theorie und Erfahrung in dieser Richtung. Während nämlich Neigung und Knoten der unveränderlichen Ebene nach STOCKWELL folgende Werte haben:

$$i = 1^{\circ} 35' \quad \delta = 106^{\circ} 43',$$

gibt SVEDSTRUP für die entsprechenden Elemente des „mittleren“ Planetoiden:

$$i = 6^{\circ} \quad \delta = 133^{\circ}.$$

Wohnt dem letzteren Ergebnis auch keine große Beweiskraft inne, so zeigt es doch jedenfalls so viel, daß man eine eingehendere Untersuchung der angedeuteten Fragen abzuwarten hat, ehe man entscheiden kann, ob und wie unsere repräsentierende Hypothese zu modifizieren ist, um auch für die Störungen in Neigung und Knotenlänge Geltung zu haben. Hat man somit auch Säkularstörungen der Knotenlänge von derselben Größenordnung wie diejenigen der Perihellänge zu erwarten, so ist doch die gesonderte Bestimmung der letzteren, die wir allein zur Massenbestimmung der Planetoiden benutzen können, leicht durchführbar: Infolge der im allgemeinen nicht allzu großen Neigungen der Planetoidenbahnen gegen den Äquator werden nämlich die Störungen in Perihellänge vorwiegend die Rektaszensionen, die der Knotenlänge dagegen in erster Linie die Deklinationen beeinflussen. Daraus haben wir für das Folgende die Lehre zu ziehen, daß wir mit Aussicht auf Erfolg nur die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung in Rektaszension benutzen dürfen, um auf Grund unserer Theorie die Masse des Planetoidenringes zu bestimmen.

Wir kommen damit jetzt zum letzten Abschnitt unserer Untersuchung, der sich zur Aufgabe stellt, das vorhandene Material an strengen Bearbeitungen von Bahnbewegungen kleiner Planeten in Rücksicht auf unseren Zweck zu prüfen, und endlich auf Grund der als die zuverlässigsten erkannten numerischen Unterlagen die Bestimmung der Gesamtmasse M wirklich zu versuchen. Auf die älteren Versuche, aus den Anomalien der Marsbewegung die Gesamtmasse der kleinen Planeten zu bestimmen, komme ich nicht noch einmal zurück, da

¹⁾ Meddelånden från Lunds Astronomiska Observatorium Nr. 12.

²⁾ Astr. Nachr. Nr. 2740/41.

schon in der Einleitung hervorgehoben ist, daß man dazu kaum noch berechtigt sein dürfte, nachdem es Herrn v. SEELIGER gelungen ist, sämtliche bisher festgestellte Unregelmäßigkeiten in der Bewegung der inneren Planeten durch die Störungen der Zodiakallichtmasse einheitlich zu erklären. Wir werden demnach unser Material lediglich unter den kleinen Planeten zu suchen haben. Maßgebend dafür ist neben der eben erwähnten Tatsache, daß die inneren Planeten für unsere Frage nicht mehr in Betracht kommen, vor allem die zu erwartende relative Größe der Störungen für die kleinen Planeten selbst. Dieselben wachsen, wie wir im theoretischen Teil gesehen haben, innerhalb des Ringes so stark an, daß, wenn überhaupt die Gesamtmasse groß genug ist, man hoffen darf, sie an diesen Stellen nachweisen zu können. Und zwar gilt das, obgleich sich selbst für die älteren kleinen Planeten die Theorie gegenüber den großen in außerordentlichem Nachteil befindet. Derselbe ist ein doppelter: einmal ist wegen der größeren Nähe Jupiters die strenge Berechnung der Störungen im allgemeinen schwieriger und außerdem ist das vorhandene Beobachtungsmaterial meist inhomogener und darum minderwertiger, als für die großen Planeten. Denn während wir für diese über lange lückenlose Reihen von Meridiankreisbeobachtungen verfügen, läßt sich ein Gleiches nur von ganz wenigen kleinen Planeten sagen, abgesehen davon, daß natürlich der gesamte Beobachtungszeitraum geringer ist. Die Örter kleiner Planeten beruhen vielmehr meist auf differentiellen Anschlüssen und enthalten daher außer den Beobachtungsfehlern noch die oft beträchtlichen Unsicherheiten der Vergleichsternörter. Die Folge davon ist, daß selbst die Mittelwerte aus einer größeren Zahl von verschiedenen Beobachtern gewonnener Beobachtungen bisweilen sehr beträchtlich voneinander abweichen. Die Meridiankreisbeobachtungen dagegen, mögen sie auch in sich nicht genauer sein, wie jene, sind jedenfalls infolge unserer genauen Kenntnis des Bezugssystems im wesentlichen nur mit den reinen Beobachtungsfehlern behaftet. Behält man dies im Auge, so kommen also die folgenden Gesichtspunkte für die Auswahl der kleinen Planeten für unseren Zweck in Betracht: Zunächst müssen wir, da wir unsere numerische Untersuchung auf die Säkularstörungen basieren wollen, nach Möglichkeit ältere Planetoiden wählen, für die wir schon über genügend lange gute Beobachtungen verfügen; ferner muß für die betreffenden Körper eine bis auf Größen zweiter Ordnung in den Massen genaue Theorie vorliegen, da wir sonst im Zweifel bleiben, ob nicht eventuelle Abweichungen von der Beobachtung etwa nur den Unvollkommenheiten der Theorie zur Last fallen; und endlich sind also solche Planeten zu bevorzugen, für welche die Normalörter wenigstens vorwiegend auf Meridiankreisbeobachtungen beruhen.

Wenn man die vorhandenen Theorien kleiner Planeten nach diesen Gesichtspunkten durchmustert, so findet man allerdings nur wenig geeignetes Material; die Kräfte der rechnenden Astronomen sind eben viel zu sehr von der Verfolgung neu aufgefundener Planeten in Anspruch genommen gewesen, als daß sich für die äußerst zeitraubende Aufgabe, für die älteren Planetoiden

erschöpfende Theorien herzustellen, genügende Bearbeiter gefunden hätten. Allgemeine Theorien, welche die wichtigsten störenden Hauptplaneten und, soweit es nötig ist, die Störungen zweiter Ordnung in den Massen berücksichtigen, gibt es nur die folgenden: HANSENS Theorie der Egeria¹⁾, die er als Beispiel für seine Methode für die Berechnung der allgemeinen Störungen gegeben hat; ferner die ebenfalls nach HANSENS Methode berechneten Theorien von Pomona²⁾ und Amphitrite³⁾ durch LESSER und E. BECKER; endlich LEVEAUS gleichfalls im Anschluß an HANSEN entwickelte Theorie der Vesta⁴⁾. Daneben käme noch NEWCOMBS auf Grund spezieller Störungen gegebene Bahnbestimmung der Polyhymnia⁵⁾ in Betracht. HANSENS Theorie der Egeria, die neuerdings von Herrn J. HÖLLING⁶⁾ einer Neubearbeitung insofern unterzogen ist, als derselbe die Berechnung der von HANSEN nicht berücksichtigten Störungen durch Venus, Erde, Uranus, Neptun hinzugefügt hat, zeigt auch nach dieser Verbesserung noch große Abweichungen gegen die Beobachtung. Neuerdings ist es Herrn SAMTER⁷⁾ gelungen, als Hauptquelle dieser Unstimmigkeiten die Vernachlässigung der „indirekten“ Saturnstörungen nachzuweisen, d. h. Störungen zweiter Ordnung, welche dadurch hervorgebracht werden, daß für die Jupiterkoordinaten nicht ihre ungestörten oder nur säkulargestörten Werte eingesetzt werden dürfen, sondern daß von den periodischen Störungen Jupiters auch noch andere als die große Ungleichheit in Rücksicht zu ziehen sind. Zwar bleiben auch in der SAMTERSchen Neubearbeitung noch einige größere Restfehler in den Normalörtern zurück. Immerhin ist das Material als für unsere Zwecke geeignet anzusehen vor allem, da ja Egeria zu den ältest bekannten Planetoiden gehört. Ähnlich, wie bei HANSENS Egeriatheorie, scheinen die Verhältnisse bei Herrn BECKERS Amphitritetheorie zu liegen. Hier ist es überhaupt von vornherein nicht gelungen, die Beobachtungen durch die Theorie vollständig darzustellen. Herr BECKER hat die Normalörter benutzt, welche die Oppositionen von 1854—1868 ergaben; dazu kam dann noch ein zufällig und unbewußt von BESSEL in seinen Zonen erlangter Ort. Diese sämtlichen Örter ließen sich nur darstellen unter Zuhilfenahme zweier empirischer Glieder, von denen das erste die Form $v t \sin \varepsilon$ (ε exzentrische Anomalie) hat, das andere als von der Periode einer langperiodischen Erdstörung angenommen

1) J. A. HANSEN, „Auseinandersetzung einer zweckmäßigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten“ und „Tafeln der Egeria“; vier Abhandlungen in den Bd. V, VI, VII, VIII d. „Abhdl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig“.

2) O. LESSER, Tafeln der Pomona; Publ. der Astr. Gesellschaft IX.

3) E. BECKER, Tafeln der Amphitrite; Publ. der Astr. Gesellschaft X.

4) G. LEVEAU, Theorie du mouvement de Vesta; Annales de l'Observ. de Paris (Mém.) XV.; Tables du mouvement de Vesta; Annales de l'Observ. de Paris (Mém.) XXII.

5) Astronomical Papers, Vol. V 5.

6) J. HÖLLING, Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Egeria (Diss.). Beihefte zu den Astr. Nachr. Nr. 12.

7) H. SAMTER, Über die Bahn des Planeten Egeria. Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften 1909, S. 1239.

ist. Herr BECKER glaubt den ersteren Term, in dem sich ν zu $-0.''15$ bestimmt, der Wirkung der Säkularstörungen durch die von ihm nicht berücksichtigten Planeten zur Last legen zu können. Eine kleine Rechnung zeigt jedoch, daß das ν , welches Merkur, Venus, Erde, Uranus, Neptun hervorbringen, bei weitem nicht diesen Betrag deckt. Ebenso lehrt ein Überschlag über die Größenordnungen, daß auch das zweite empirische Glied schwerlich in der angegebenen Größe von der Erde herrühren kann. Allgemein möchte ich an die Amphitritetheorie die Bemerkung knüpfen, daß es wohl lohnender gewesen wäre, statt der fast durchweg minimalen Marsstörungen die erheblich größeren von der Erde herrührenden strenger zu berechnen; die größeren unter ihnen, z. B. das konstante Glied im Radiusvektor, können immerhin merkbare Beträge erreichen. Jedenfalls weichen die Amphitritetafeln schon drei Jahre nach dem letzten für die Bahnbestimmung verwandten Normalort um $15''$ von den Beobachtungen ab, und der weitere Verlauf der Ephemeridenkorrektion bis zur Gegenwart, welchen ich unter Weglassung der empirischen Glieder für die meisten Oppositionen berechnet habe, scheint auch in diesem Falle darauf hinzudeuten, daß ähnliche Vernachlässigungen, wie bei Egeria, hier wirksam sind; man wird jedenfalls eine vollständige Neubearbeitung der Amphitritetheorie vornehmen müssen, ehe man aus ihr Schlüsse im Sinne unserer Frage ziehen kann. Es muß übrigens hervorgehoben werden, daß für die Amphitritegruppe auch die Bestimmung der großen Ungleichheit schon auf sehr beträchtliche Schwierigkeiten stößt, da die mittlere Bewegung nicht mehr allzu weit von der Kommensurabilität entfernt ist. In jeder Beziehung günstiger liegen die Verhältnisse bei Herrn LEVEAUS Vestatafeln. Da Vesta zu den erstentdeckten Planetoiden gehört und infolge ihrer Helligkeit in jeder Opposition an Meridiankreisen beobachtet worden ist, so konnte Herr LEVEAU seine Bahnbestimmung auf 55 über 81 Jahre verteilte Normalörter basieren, deren jeder auf einer größeren Zahl nahezu gleichartiger (Meridiankreis-) Beobachtungen beruhte. Allerdings liegt Vesta schon ziemlich weit von der Stelle im Planetoidenring entfernt, wo die Säkularstörungen in Perihel ihrem Absolutbetrag nach ein Maximum haben; sie sind für Vesta nur noch etwas weniger als die Hälfte des Betrages an der dichtesten Stelle des Ringes. Trotzdem liefert die genannte Vesta-Theorie wohl das beste Material für unseren Zweck.

Dem eben Gesagten entsprechend werde ich also für unsere Untersuchung zunächst die Vesta-Theorie heranziehen und gehe daher nun dazu über, die Residuen der 55 Vesta-Normalörter von 1807—1888, welche ich der LEVEAUSchen Abhandlung¹⁾ entnehme, auf eine etwaige Säkularbewegung des Perihels zu diskutieren. Es sollen jedoch dafür, wie früher begründet wurde, nur die Beobachtungsreste in Rektaszension zur Verwendung gelangen. Bezeichnet $\delta\tilde{\omega}_0$ eine konstante Korrektion der Perihellänge zur Zeit $t = 0$, $\delta\tilde{\omega}_1$ die hypothetische jährliche Säkularbewegung des Perihels, so gibt jeder Beobachtungs-

¹⁾ pag. A 57 der 2. in Fußnote 4) auf S. 143 zitierten Arbeit.

rest eines Normalortes in Rektaszension Veranlassung zu einer Bedingungsgleichung folgender Form für $\delta\tilde{\omega}_0$ und $\delta\tilde{\omega}_1$:

$$a \delta\tilde{\omega}_0 + a t \delta\tilde{\omega}_1 + \triangle \alpha = 0$$

Hier ist a der aus 5) und 6) des ersten Abschnittes dieses Kapitels abzuleitende Koeffizient, $\triangle \alpha = \text{Rechnung} - \text{Beobachtung}$ (in α). Nachdem $\delta\tilde{\omega}_1$ bestimmt ist, findet sich endlich

$$M = \frac{\delta\tilde{\omega}_1}{n \text{ (II)}}$$

Die numerische Ausführung ergibt folgenden Satz von Bedingungsgleichungen:

Zeit				
1807. 30	— 0.130 $\delta\tilde{\omega}_0$	— 0.039 $\delta\tilde{\omega}_1$	=	— 1.3''
1808. 70	+ 0.016	+ 0.027	=	— 0.1
1810. 06	+ 0.232	+ 0.707	=	— 1 6
1811. 40	— 0.370	— 1.628	=	+ 2.1
1812. 82	+ 0.192	+ 1.117	=	— 0.1
1814. 14	+ 0.056	+ 0.400	=	+ 1.3
1815. 57	— 0.212	— 1.817	=	+ 4.0
1819. 72	+ 0.087	+ 1.105	=	+ 1.0
1822. 47	— 0.382	— 5.911	=	+ 2.8
1823. 85	+ 0.222	+ 3.741	=	+ 1.7
1825. 28	— 0.027	— 0.491	=	— 0.2
1826. 64	— 0 102	— 2.003	=	+ 4.1
1830. 80	+ 0.137	+ 3.261	=	+ 0.7
1832. 19	+ 0.124	+ 3.125	=	+ 1.0
1833. 63	— 0.267	— 7.111	=	+ 0.3
1835. 00	+ 0.203	+ 5.684	=	+ 0.6
1836. 20	— 0.108	— 3.154	=	— 0.3
1837. 83	+ 0.009	+ 0.277	=	— 0.5
1839. 01	+ 0.249	+ 7.971	=	+ 0.1
1840. 43	— 0.343	— 11.467	=	— 0.5
1841. 94	+ 0.147	+ 5.136	=	+ 0.1
1843. 12	+ 0.080	+ 2.892	=	— 1.1
1844. 65	— 0.214	— 8.057	=	— 0.8
1845. 92	+ 0.261	+ 10.158	=	+ 0.1
1847. 30	— 0.191	— 7.697	=	+ 0.5
1848. 80	+ 0.063	+ 2.633	=	— 0.9
1850. 09	+ 0.208	+ 8.965	=	— 0.6
1851. 50	— 0.356	— 15.842	=	— 1.0
1852. 94	+ 0.185	+ 8.499	=	+ 0.4
1854. 20	+ 0.000	+ 0.	=	— 0.4
1855. 72	— 0.107	— 5.213	=	0.0
1857. 06	+ 0.224	+ 11.213	=	— 0.1

Zeit				
1858.32	— 0.271 $\delta\tilde{\omega}_0$	— 13.907 $\delta\tilde{\omega}_1$	=	+ 1.1''
1859.80	+ 0.122	+ 6.442	=	— 0.5
1861.12	+ 0.164	+ 8.875	=	— 1.3
1862.53	— 0.353	— 19.603	=	+ 1.2
1863.93	+ 0.225	+ 12.809	=	+ 0.3
1865.21	— 0.083	— 4.832	=	— 1.0
1866.68	— 0.032	— 1.909	=	— 1.0
1868.00	+ 0.257	+ 15.677	=	+ 0.9
1869.38	— 0.339	— 21.147	=	— 1.3
1870.82	+ 0.168	+ 10.721	=	— 0.5
1872.12	+ 0.104	+ 6.772	=	+ 1.1
1873.63	— 0.243	— 16.192	=	— 0.2
1875.00	+ 0.229	+ 15.572	=	— 0.1
1876.33	— 0.159	— 11.024	=	+ 0.2
1877.84	+ 0.047	+ 3.330	=	— 2.2
1879.13	+ 0.191	+ 13.777	=	+ 0.4
1880.45	— 0.374	— 27.470	=	— 1.3
1881.91	+ 0.185	+ 13.858	=	— 0.1
1883.25	+ 0.016	+ 1.220	=	+ 1.1
1884.72	— 0.130	— 10.104	=	+ 1.4
1886.03	+ 0.239	+ 18.888	=	+ 0.6
1887.30	— 0.247	— 19.834	=	+ 1.2
1888.81	+ 0.103	+ 8.426	=	+ 0.4

Wenn nun auch schon der bloße Augenschein zeigt, daß in diesen Beobachtungsresten eine anomale Perihelbewegung von erheblicher Größe nicht verborgen sein kann, so scheint es wegen der größeren überzeugenden Kraft doch nötig, die strenge Auflösung der Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate wirklich vorzunehmen. Es ergibt sich dabei das Folgende:

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\omega}_0 &= - 2.86 \pm 1.41 \text{ m. F.} \\ \delta\tilde{\omega}_1 &= + 0.070 \pm 0.033 \text{ m. F.}\end{aligned}$$

Da nun die mittleren Fehler nur etwa die Hälfte der für die beiden Unbekannten gefundenen Werte ausmachen, so darf man doch einiges Vertrauen in die Realität der berechneten Zahlen haben, obgleich der mittlere Fehler des Normalortes von ± 1.26 nur auf ± 1.20 herabgegangen ist.

Ich will nun in ganz analoger Weise die Widersprüche, welche bei der SAMTERschen Egeriabearbeitung bleiben, behandeln. Diese Widersprüche, welche bei den Normalörtern verbleiben, sind die folgenden:

Normalort	B—R	Normalort	B—R
1850	+ 0.1	1869	+ 0.1
1852	— 0.4	1871	+ 0.4
1854	— 0.9	1873	— 0.3
1856	+ 5.7	1875	+ 1.9
1857	+ 0.3	1879	+ 4.4
1858	— 0.3	1881	— 3.3
1860	— 0.9	1883	— 1.5
1862	— 2.2	1895	+ 1.5
1864	— 2.9	1896	+ 0.5
1865	— 0.4	1904 I	+ 0.3
1866	+ 0.4	1904 II	— 2.2
1867	+ 0.9	1906	+ 0.3

Daraus bildet man bei Annahme gleicher Gewichte das folgende Gleichungssystem für $\delta\tilde{\omega}_0$ und $\delta\tilde{\omega}_1$:

1850	1	$\delta\tilde{\omega}_0 + 0.95$	$\delta\tilde{\omega}_1 = - 6.7$
1852	1	2.21	+ 2.4
1854	1	4.75	— 27.7
1856	1	6.15	— 24.8
1857	1	7.47	+ 1.5
1858	1	8.74	— 4.5
1860	1	10.12	+ 3.2
1862	1	12.72	— 16.8
1864	1	14.45	+ 7.5
1865	1	15.39	— 4.0
1866	1	16.69	+ 2.4
1867	1	17.96	— 3.5
1869	1	19.34	+ 2.2
1871	1	21.94	— 2.1
1873	1	23.34	+ 92.9
1875	1	25.88	— 16.7
1879	1	29.83	— 104.8
1881	1	31.22	+ 23.4
1883	1	33.83	— 72.8
1895	1	45.71	+ 9.8
1898	1	48.41	+ 7.9
1904 I	1	54.87	— 2.1
1904 II	1	54.91	+ 15.5
1906	1	56.27	— 5.9

Die Ausgleichung ergab

$$\delta\tilde{\omega}_0 = - 6.797 \pm 12.733 \text{ m. F.}$$

$$\delta\tilde{\omega}_1 = + 0.078 \pm 0.424 \text{ m. F.}$$

Die Quadratsumme sank nur von 28 067 auf 27 688 und entsprechend der mittlere Fehler des Normalortes von 1."41 auf 1."39. Die mittleren Fehler zeigen hier ein anderes Verhalten als bei Vesta, sie sind beträchtlich größer als die gesuchten Werte selbst; ein Zeichen, daß hier die Reste keine Andeutung des ihnen oktroyierten Gesetzes zeigen.

Welche Schlußfolgerungen gestatten nun diese Zahlen im Sinne unserer Fragestellung? Die $\delta\tilde{\omega}_0$ sind natürlich gleichgültig, sie hängen ja lediglich vom Anfangspunkt der Zeitzählung ab; dagegen gestatten die $\delta\tilde{\omega}_1$ direkt die Gesamtmasse des Planetoidenringes zu bestimmen. Da

$$M = \frac{\delta\tilde{\omega}_1}{n \text{ (II)}}, \quad \text{und}$$

da nach dem Diagramm

(II)

für Vesta = — 1.31

„ Egeria = — 3.64

so ergibt sich rein mechanisch folgendes höchst überraschende Resultat:

$$\begin{array}{l} \text{aus Vesta } M = -174 \\ \text{„ Egeria } M = -80 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{bezogen} \\ \text{auf Vesta} \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} = -\frac{1}{2.3} \\ = -\frac{1}{5} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{bezogen} \\ \text{auf Mars.} \end{array} \right.$$

Wie das Vorzeichen also lehrt, kann es sich bei diesen Resten „anomaler“ Perihelbewegung, deren Realität übrigens, besonders bei Egeria, nicht als gesichert anzusehen ist, nicht um Störungen durch den Planetoidenring handeln; man würde eher, bei der genäherten Gleichheit von $\delta\tilde{\omega}_1$ für Vesta und Egeria, an eine weit außerhalb liegende Störungsursache denken können.

Wir können also das Schlußresultat so zusammenfassen: Ist für den Planetoidenring schon aus phänomenologischen Gründen nur unter höchst unwahrscheinlichen Annahmen für das Massenverteilungsgesetz eine Gesamtmasse von etwa $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$ der Marsmasse zulässig, so ergab die Untersuchung der mechanischen Wirkungen rein formell sogar eine negative Masse. Das bedeutet in Praxis, daß die Gesamtmasse jedenfalls so gering ist, daß ihre Wirkung gegenüber anderen vielleicht noch nicht genügend berücksichtigten geringfügigen Störungen sich keine Geltung verschaffen kann, daß also eine Grenzbestimmung nicht möglich ist. Ein Widerspruch gegen die statistische Massentaxierung besteht nicht.



Fig. 2.

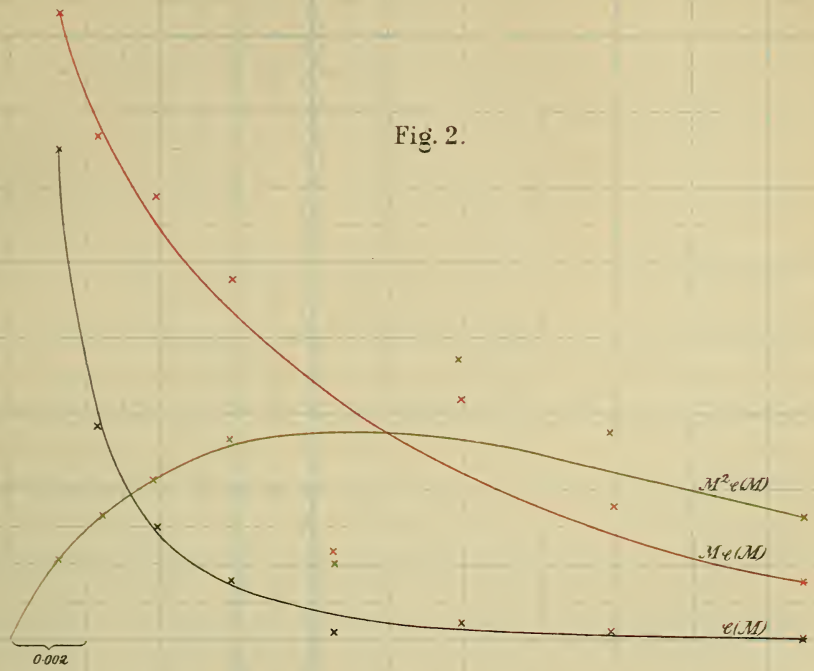


Fig. 4.

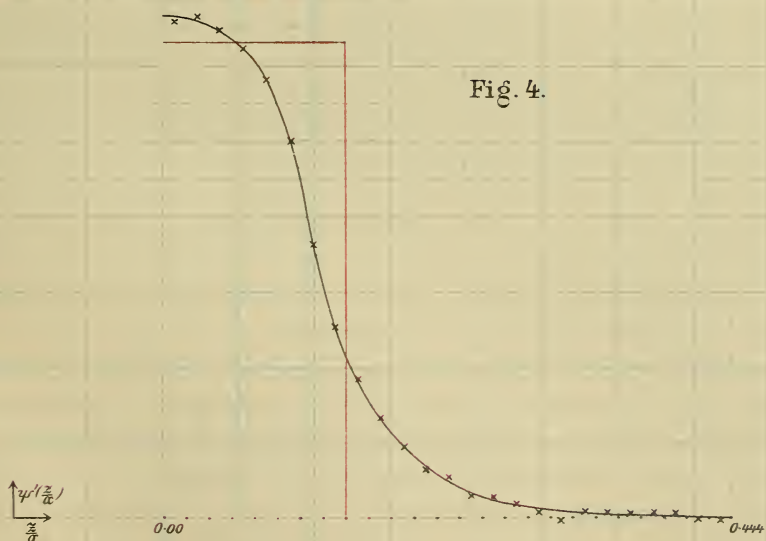


Fig. 5.

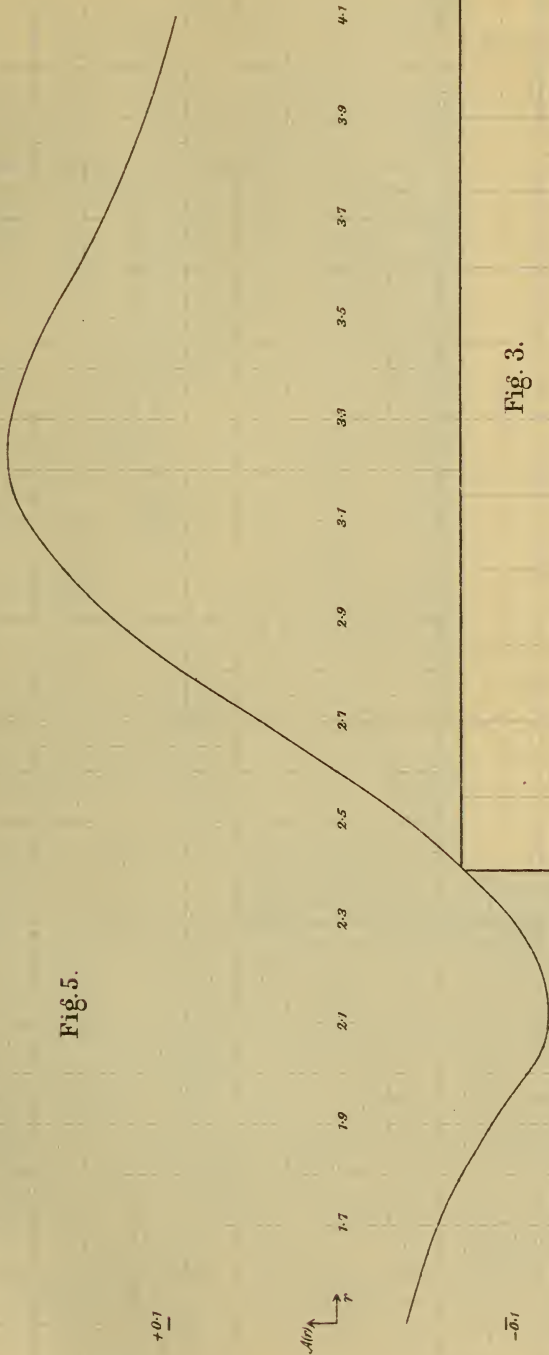


Fig. 3.

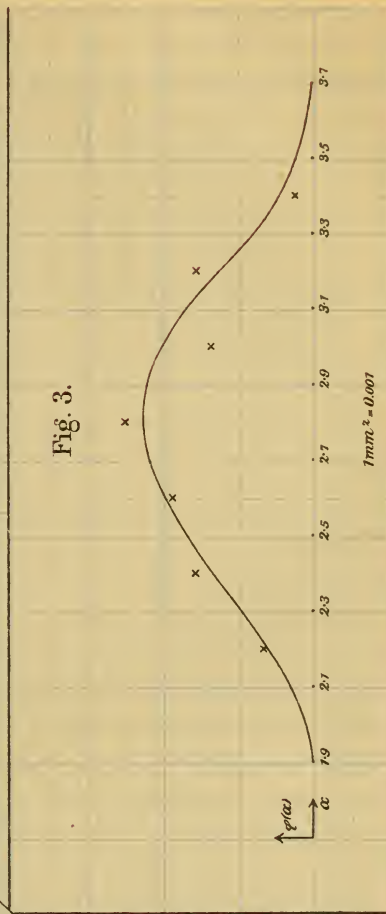
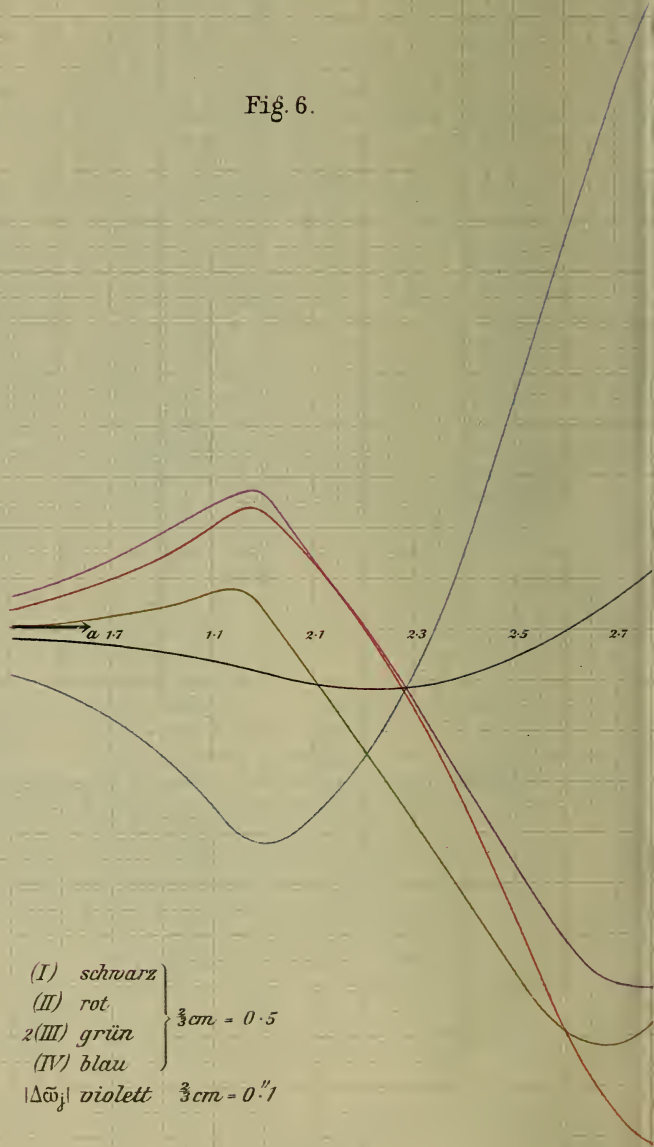


Fig. 6.



Tafel Wu.V.

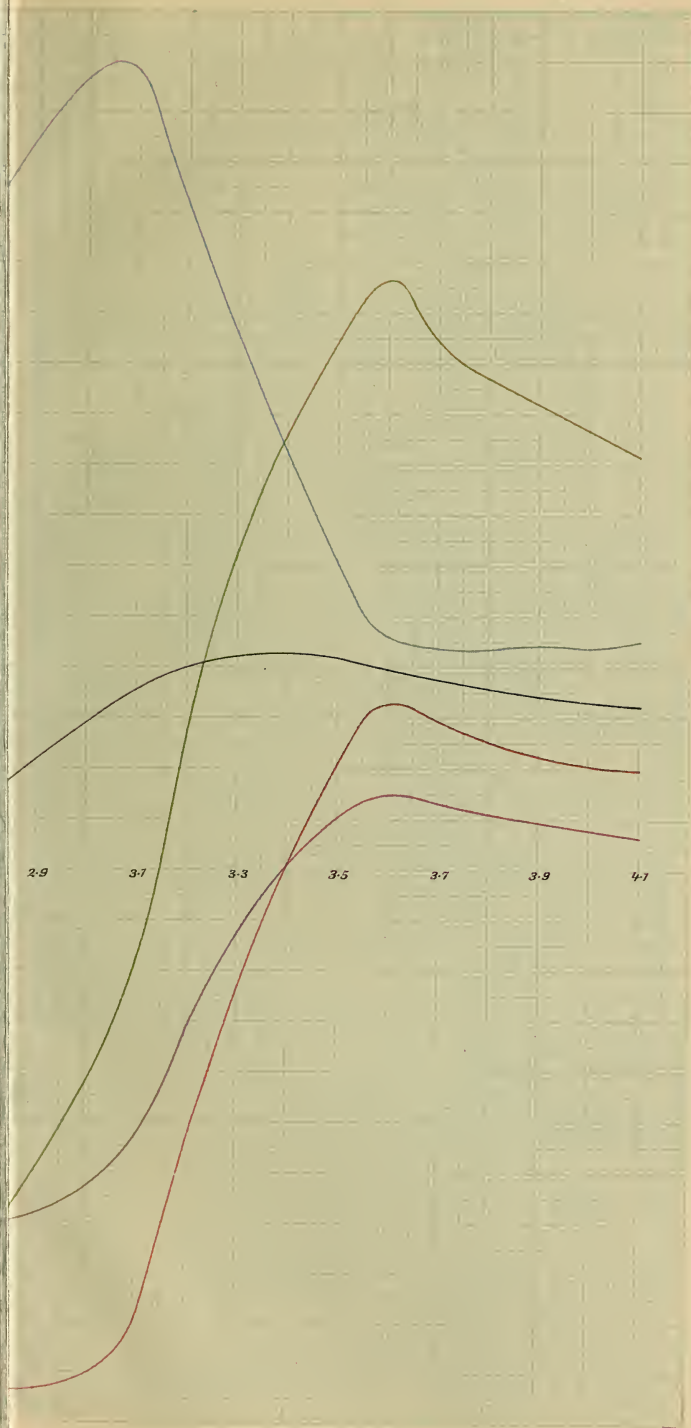


Fig. 6.

